Contas para aposentadoria

para Tamira

de Tássio

Versão criada às 17:16 do dia 20 de setembro de 2023.

Sumário

1 Oi mana!

Tenho feito contas para quando me aposentar, para saber o que vai acontecer se eu só puder contar com o que economizo: *em função de minha economia e de quanto tempo trabalho, quantos anos posso não trabalhar?* Achei que você poderia achar interessante (sem falar que explicar é a melhor maneira de conferir).

Uma dificuldade deste exercício é que são tantas as coisas que podemos considerar… fica fácil complicar demais as contas e se perder os detalhes antes de chegar muito longe (sem contar que prever o futuro é impossível).

1.1 Que perguntas queremos responder?

Temos poucas variáveis sob nosso controle: podemos tentar gastar menos, ganhar mais (aumentando o salário, arrumando mais fontes de renda, fazendo o dinheiro render mais), ou trabalhar mais tempo (vivaaa…). Fora do nosso controle há muito mais: inflação, crise ambiental, problemas de saúde (nossos ou de familiares), acidentes (desde pane de objetos do nosso dia-a-dia até acidentes mesmo com a gente, ou incêndios, etc.), roubos e por aí vai. Apesar disso, acredito ser importante ter uma ideia geral, mesmo que estimada, no sentido de que "*failing to plan is planning to fail*".

Quero estimar quanto vai valer o dinheiro que economizo hoje quando eu me aposentar. Qual a renda que poderei me pagar quando eu não mais tiver atividade remunerada regular. Daí saberei se preciso simplificar minha vida, mudar de emprego ou pensar no que fazer com o que já economisei. Essas contas também ajudam a estimar quanto tempo até poder comprar uma casa, mas essa discussão pode ficar para um próximo capítulo.

Adendo⟨2023-09-12⟩**:** No fim do texto vou ver se coloco algumas ideias sobre como usar essas contas e estimativas para investigar outros cenários, assim como alguma discussão sobre alternativas que temos para nos preparar para o futuro, cada uma com prós e contras…

1.2 Premissas e contexto

Vamos logo descrever o cenário idealizado do qual partiremos: temos um salário mais ou menos estável, do qual anualmente guardamos uma certa parte (digamos, por exemplo, que economizo 20% do dinheiro que recebo anualmente). Quanto tempo poderei viver, quando aposentado, com esse dinheiro?

Para ter alguma chance de estimar a resposta, precisamos definir quais parâmetros estamos olhando, e quais as premissas da nossa análise. Todas essas coisas são aproximações; só queremos a ter uma ideia de um futuro possível, para informar nossos planos presentes.

Conheço meus gastos, e eles não vão mudar. Só serão ajustados pela inflação. Se por um lado algum dia deixaremos de pagar aluguel, por outro teremos gastos de manutenção de uma casa própria e mais impostos a pagar; se por um lado teremos mais gastos com saúde na velhice, por outro comeremos menos e não teremos mais o transporte de ida e vinda até o trabalho. As coisas não se balançam exatamente, mas, ao menos numa primeira aproximação, vamos simplesmente ignorar esses fatores, mantendo em mente que estamos simplificando as coisas aqui. O que significa conhecer meus gastos, para estas contas? Significa que tenho mantido registros de quanto dinheiro entra e sai por algum tempo (meses, anos) e esse valor está mais ou menos estável em torno de alguma fração do que recebo.

Adendo⟨2023-09-20⟩**:** será preciso, em algum momento, assumir que conseguimos negociar um reajuste de salário, ainda que inferior à inflação. Isso porque se gastamos 95% de nosso salário cada ano e a inflação é de 5% ao ano, então daqui a dois anos já não conseguimos mais sobreviver com nosso próprio salário! Uma conta a fazer seria imaginar que temos um reajuste de salário de, digamos, 50% do valor da inflação a cada ano. Note que nessa situação (aumento de salário igual a metade da inflação), também é questão de tempo até não conseguirmos sobreviver do nosso salário—ê tristeza—mas talvez isso atrase o bastante esse tempo para que seja possível aposentar antes de bater as botas.

Inflação e rendimento das nossas economias são constantes. Inflação varia, e ponto. Mas podemos escapar um pouco dos índices de inflação se evitamos consumir itens diretamente atrelados a coisas com o preço em alta. (Consumir produtos locais, por exemplo, diminui o efeito da inflação sobre o combustível nas nossas despesas.) Quanto ao rendimento de nossas economias, podemos melhorá-lo buscando poupanças com melhor rendimento, investindo na bolsa de valores, em papéis emitidos por governos, e mesmo comprando uma casa para colocar de aluguel. Novamente, os valores exatos são impossíveis de saber, mas dá para ter previsões de pior e melhor cenários, o que já é alguma coisa.

Vou viver até os 90, 95 ou 105 anos. Cada um dos números é improvável, mas, juntos, provavelmente cobrem a estimativa correta para morte por causas "naturais". *Memento mori*.

1.3 Parâmetros

A grosso modo, os parâmetros que vamos considerar são

E o quanto recebemos anualmente;

αE o quanto economizamos;

$1+\beta$ inflação;

$1+\gamma$ rendimento de nossas economias;

κE quanto temos guardado agora;

r quantos anos vivemos aposentados;

w quantos anos vamos trabalhar; e

ζ quanto dinheiro queremos que reste quando morremos (para a pobre alma que cuidará das burocracias dos vivos sobre os mortos, quando batidas estiverem nossas botas).

Aqui está o cenário imaginado, com mais detalhes. Temos κE guardado no banco, e anualmente recebemos E (líquido, com impostos já pagos), e α é a fração de E que economizamos no ano passado (ou seja, terminamos o ano com αE a mais guardado). Em particular, isso significa que ano passado gastamos $(1-\alpha)E$. A inflação é $1+\beta$, ou seja, no ano que vem esperamos gastar $(1-\alpha)E(1+\beta)$. Isso significa que no fim deste ano teremos acrescentado às nossas economias mais

$$E-(1-\alpha)(1+\beta)E = E\bigl(1-(1-\alpha)(1+\beta)\bigr).$$

ao mesmo tempo, os κE que lá estavam renderam $1+\gamma$. Juntando tudo, no fim deste primeiro ano de trabalho teremos

$$\underbrace{\kappa E(1+\gamma)}_{\text{poupança}} + \underbrace{E\big(1-(1-\alpha)(1+\beta)\big)}_{\text{dinheiro recebido no ano}} = E\big(\kappa(1+\gamma)+1-(1-\alpha)(1+\beta)\big) \tag{1}$$

guardados.

1.4 Sobre a contaiada

A "contaiada" consiste quase somente em usar (repetidas vezes) somas de progressões geométricas. E talvez algum logaritmo no dim fim das contas. Sério, é só. Aqui vai uma revisão rápida. Se $q=1$, então

$$1+q+q^2+\cdots+q^{t-1} = 1+1+1^2+\cdots+1^{t-1} = \overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{t-1 \text{ vezes}} = t-1. \tag{2}$$

Caso contrário (isto é, quando $q \neq 1$), temos

$$1+q+q^2+\cdots+q^{t-1} = \frac{q^t-1}{q-1} \tag{3}$$

Se você está contente com a fórmula (3), talvez queira pular o resto desta seção. O que vamos fazer aqui é dar um exemplo da fórmula "em ação", e mostrar porque ela é válida. Vamos fazer um exemplo, primeiro sem usar a fórmula. Quando $q=10$ a soma é

$$\overbrace{\underbrace{\overbrace{1+10}^{11}+10^2}_{111}+10^3}^{1111}+\cdots+10^{t-1} = \overbrace{111\ldots1}^{t \text{ vezes}}$$

Chegamos ao mesmo resultado é notando que o valor da soma está relacionado com

$$10^t = \overbrace{10\ldots0}^{t \text{ vezes}}$$

que seria o próximo a colocar na soma. Isso porque 10^t-1 é uma sequência de t dígitos nove. Daí que conseguimos "forçar" a aparição da fórmula, pois

$$1+10+10^2+\cdots+10^{t-1} = \overbrace{111\ldots1}^{t \text{ vezes}} = \frac{\overbrace{9\ldots9}^{t \text{ vezes}}}{9} = \frac{\overbrace{10\ldots0}^{t \text{ vezes}}-1}{9} = \frac{10^t-1}{9} = \frac{10^t-1}{10-1}.$$

Isso é essencialmente o que acontece no caso "geral". Se $q \neq 1$, então a fração $(q^t-1)/(q-1)$ é "válida" (pois não estamos dividindo por zero). Podemos então chegar à equação (3), partindo do lado direito da equação, chegando à soma da progressão geométrica. como segue

$$
\begin{aligned}
\frac{q^t-1}{q-1} &= \frac{q^t - 1 + \overbrace{(q+q^2+\cdots+q^{t-1}) - (q+q^2+\cdots+q^{t-1})}^{zero}}{q-1} && \text{some zero} \\
&= \frac{(q+q^2+\cdots+q^{t-1}+q^t) - (1+q+\cdots+q^{t-1})}{q-1} && \text{reordene a soma} \\
&= \frac{q(1+q+\cdots+q^{t-1}) - (1+q+\cdots+q^{t-1})}{q-1} && \text{bote } q \text{ em evidência no primeiro termo} \\
&= \frac{(q-1)(1+q+\cdots+q^{t-1})}{q-1} && \text{bote } 1+q+\cdots+q^{t-1} \text{ em evidência} \\
&= \frac{\cancel{(q-1)}(1+q+\cdots+q^{t-1})}{\cancel{q-1}} && \text{cancele fator comum } q-1 \\
&= 1+q+\cdots+q^{t-1}
\end{aligned}
$$

Sucesso!

2 Aquecimento

Vamos fingir que não existe inflação, e que o dinheiro fica no banco sem render nada. Isso dá uma primeira ideia das contas que precisamos fazer. Começamos o ano com κE guardado, e temos $\beta = \gamma = 0$. Ao fim do primeiro ano, temos

$$A_1 = \kappa E + \alpha E = E(\kappa + \alpha).$$

(Note que esse valor confere com a equação (1).) Já no fim do ano seguinte, teremos

$$A_2 = A_1 + \alpha E = E(\kappa + 2\alpha).$$

Depois de trabalhar t anos, teremos

$$
\begin{aligned}
A_3 &= A_2 + \alpha E = E(\kappa + 3\alpha) \\
A_4 &= A_3 + \alpha E = E(\kappa + 4\alpha) \\
A_5 &= A_4 + \alpha E = E(\kappa + 5\alpha) \\
&\dots \\
A_t &= A_{t-1} + \alpha E = E(\kappa + t\alpha)
\end{aligned}
$$

Viveremos agora a anos aposentados. Sem inflação, continuamos gastando $(1-\alpha)E$ por ano. Sendo assim, ao fim do primeiro ano de aposentadoria, teremos

$$A_{t+1} = A_t - (1-\alpha)E = E\big(\kappa + t\alpha - (1-\alpha)\big)$$

e nos anos seguintes, teremos

$$
\begin{aligned}
A_{t+2} &= A_{t+1} - (1-\alpha)E = E\big(\kappa + t\alpha - 2(1-\alpha)\big)\\
A_{t+3} &= A_{t+2} - (1-\alpha)E = E\big(\kappa + t\alpha - 3(1-\alpha)\big)\\
&\dots\\
A_{t+a} &= A_{t+w-1} - (1-\alpha)E = E\big(\kappa + t\alpha - a(1-\alpha)\big)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Digamos que ao fim e ao cabo queremos que sobre o bastante para cobrir dois meses de despesas. Como o gasto anual é $(1-\alpha)E$ e não há inflação, isso significa exigir que

$$A_{t+a} = 2\frac{(1-\alpha)E}{12} = \frac{(1-\alpha)E}{6}.$$

Combinando com a equação (4), temos

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-\alpha)E}{6} = A_{t+a} &= E\big(\kappa + t\alpha - a(1-\alpha)\big) && \iff\\
\frac{1-\alpha}{6} &= \kappa + t\alpha - a(1-\alpha) && \iff\\
a &= \frac{\kappa + t\alpha - \frac{1-\alpha}{6}}{1-\alpha} && \iff\\
a &= \frac{\kappa + t\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Podemos rescrever a expressão acima destacando a relação entre t (número de anos trabalhados) e a número de nos que podemos desfrutar sem trabalhar

$$a = t\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\kappa}{1-\alpha} - \frac{1}{6}.$$

Nesse cenário simples, digamos, se $\alpha = 1/3$ (isto é, se guardamos um terço de nosso salário), então $\alpha/(1-\alpha) = 1/2$, e assim cada dois anos trabalhados correspondem a um ano a mais aposentado.

3 Agora com inflação

Buáááááá… Se $\beta > 0$, então a coisa é mais complicada, já que gastamos mais a cada mês. Como gastamos $(1-\alpha)E$ ano passado, este ano esperamos gastar $(1-\alpha)(1+\beta)E$. Levando isso em conta, ao fim do primeiro ano, teremos

$$A_1 = \kappa E + \big(1 - (1-\alpha)(1+\beta)\big)E = E[\kappa + 1 - (1-\alpha(1+\beta)\alpha].$$

(Note que esse valor confere com a equação (1).) Já no segundo ano, estimamos que nosso gasto será de $(1-\alpha)(1+\beta)^2E$. Daí que teremos

$$A_2 = A_1 + \big(1 - (1-\alpha)(1+\beta)^2\big)E = E\big[\kappa + 2 - (1-\alpha)\big((1+\beta) + (1+\beta)^2\big)\big].$$

Depois de trabalhar t anos, teremos

$$
\begin{aligned}
A_3 &= A_2 + \big(1 - (1-\alpha)(1+\beta)^3\big)E = E\big[\kappa + 3 - (1-\alpha)\big((1+\beta) + (1+\beta)^2 + (1+\beta)^3\big)\big] \\
A_4 &= A_3 + \big(1 - (1-\alpha)(1+\beta)^4\big)E = E\big[\kappa + 4 - (1-\alpha)\big((1+\beta) + \cdots + (1+\beta)^4\big)\big] \\
A_5 &= A_4 + \big(1 - (1-\alpha)(1+\beta)^5\big)E = E\big[\kappa + 5 - (1-\alpha)\big((1+\beta) + \cdots + (1+\beta)^5\big)\big] \\
&\dots \\
A_t &= A_{t-1} + \big(1 - (1-\alpha)(1+\beta)^t\big)E = E\big[\kappa + t - (1-\alpha)\big((1+\beta) + \cdots + (1+\beta)^{tq}\big)\big]
\end{aligned} \tag{5}
$$

Se você chegou até aqui, *parabéns!* Eu avisei que as contas eram chatas? Vamos fazer uma pausa (coma um chocolate, sei lá), enquanto pensamos no que é que aprendemos com isso (fora lembrar que contas podem ser extremamente chatas).

Lembre que na equação (5) calculamos que, sem inflação nem rendimento na poupança, teríamos $E(\kappa+t\alpha)$ guardado. Com a inflação, a cada ano contribuimos *ligeiramente menos* para nosso tempo de aposentadoria, pois não só gastamos mais e guardamos menos, como nossos gastos durante a aposentadoria são maiores. Uma dupla perda. Para quantificar exatamente *quanto* estamos perdendo, precisamos terminar as contas deste cenário.