Segunda aula

Na quarta començamos falar de $\mathbb{R}^n$, que, com a adição e a multiplicação, é um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos reais.

0.0.1 Espaços vetoriais com produto interno

Definição 0.1. Seja V um espaço vetorial (sobre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno sobre V é uma função

$<,> : V \times V \to K$ tal que $\forall x, y \in V,\ \alpha, \beta \in K,$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. simetría conjugada: $< x, y >= \overline{< y, x >}$;
2. definida positiva: $x \neq 0 \ \Rightarrow < x, x > > 0)$;
3. bilinearidade (linearidade em cada uma das variáveis):
   - $< \alpha x, y > = \ \alpha < x, y > = < x, \alpha y >$,
   - $< x + y, z > = < x, y > + < y, z >$.

Isso que dizer que um produto interno num espaço vetorial real é uma aplicação *real, simétrica, bilinear e definida positiva.* Um espaço vetorial que que tenha um produto interno diz-se de *espaço vetorial com produto interno.*

O *produto escalar*, que vamos indicar com $\cdot$, é o produto interno canónico para $\mathbb{R}^n$:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Exercício 0.2. *Comprova que o produto escalar é um produto interno*

0.0.2 Norma euclidiana

Dado $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos a *norma euclidiana* da seguinte forma:

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_i^2 + ... + x_n^2}$$

A norma euclidiana associa um número real a cada vector $x \in \mathbb{R}^n$, e podemos interpretar geometricamente $|x|$ como o 'cumprimento' do vector x. Percebam que, por definição, $|x|^2 = x \cdot x$, assim que
$|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ x \cdot x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$.

Dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ é *ortogonal* à $y \in \mathbb{R}^n$ quando $x \cdot y = 0$, e nesse caso escrevemos $x \perp y$. Temos que

- o vetor $0 \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal a qualquer vector $x \in \mathbb{R}^n$,
- dado x, $y \in \mathbb{R}^n$ podemos sempre escrever $y = \alpha x + z$, com $\alpha = \frac{x\dot{y}}{|x|^2}$ e $x \perp z$.

Teorema 0.3. ***Desigualdade de Cauchy-Schwarz:*** *Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$|x \cdot y| \leq |x||y|$$

com igualdade se e só se $x = \beta y$, $\exists \beta \in \mathbb{R}$ (ou trivial: $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x = y = 0$).

Prova. *Se $x = 0$ ou $y = 0$ é trivial, assim vamos assumir $x \neq 0$ e $y \neq 0$ qualquer, e então escrevemos $y = \alpha x + z$, com $\alpha = \frac{x \cdot y}{|x|^2}$ e $x \perp z$. Assim temos:*

$$|y|^2 = (\alpha x + z) \cdot (\alpha x + z) = \alpha^2 |x|^2 + |z|^2 + 2\alpha x \cdot z = \alpha^2 |x|^2 + |z|^2,$$

já que $x \perp z$, e então, já que $|z|^2 \geq 0$, obtemos

$$|y|^2 \geq \alpha^2 |x|^2 = \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^4} |x|^2 = \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^2},$$

daí $|x|^2 |y|^2 \geq (x \cdot y)^2$ e finalmente $|x||y| \geq |x \cdot y|$, com igualdade se e só se $y = \alpha x + z$ com $z = 0$, isso é, se $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

A norma euclidiana goza das seguintes propriedades, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. é definida positiva: $|x| \geq 0,\ |x| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$,
2. é homogénea: $|\alpha x| = |\alpha||x|$,
3. é subaditiva: $|x + y| \leq |x| + |y|$;

já que:

1. Por definição $|x| = \sqrt{x \cdot x} \geq 0$, e $|x| = 0 \Leftrightarrow 0 = |x|^2 = x \cdot x \ \Leftrightarrow\ x = 0$,
2. $|\alpha x| = \sqrt{\alpha x \cdot \alpha x} = \sqrt{\alpha^2 x \cdot x} = |\alpha| \sqrt{x \cdot x} = |\alpha||x|$,
3. perceba que

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y =$$

$$= |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x \cdot y| + |y|^2,$$

e por a desigualdade de Schwarz

$$|x|^2 + 2|x \cdot y| + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Assim temos

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2,$$

e já que ambos termos são não negativos, o anterior implica

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

0.0.3 Espaços normados

De fato, a norma euclidiana é um caso particular de norma:

Definição 0.4. Seja V um espaço vetorial (sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$). Uma norma em V é uma função real

$$\| \ \| : V \to \mathbb{R}$$

tal que, para cada $v, w \in V, \ a \in K$:

1. é definida positiva: $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \ \Leftrightarrow \ v = 0$,
2. é homogénea: $\|av\| = |a|\|v\|$,
3. é subaditiva: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Um espaço vetorial que tenha uma norma chama-se de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado.*

Se V é um espaço vetorial com produto interno $<,>$, podemos dizer que v, $w \in V$ são *ortogonais* e escrevemos $v \perp w$ quando $< v, w >= 0$.

Temos que $0 \in V$ é ortogonal a todo $v \in V$, já que $< 0, v >=< 00, v >= 0 < 0, v >= 0$. Também temos que, para todo v, $w \in V$, podemos escrever $w = av + u$ com $a = \frac{<w,v>}{<v,v>}$ e $v \perp u$ (e claramente $u \in V$). Para ver isso temos que demonstrar que, dado v, $w \in V$ diferentes do vetor $0 \in V$, o vetor $u = w - av$ com $a = \frac{<w,v>}{<v,v>}$ é ortogonal a v:

$$< v, u > = < v, w - av > = < v, w > - < v, av > =$$

$$= < v, w > -a < v, v > = < v, w > - \frac{< w, v >}{< v, v >} < v, v > = \ 0.$$

Isso implica que, se V é um espaço vetorial com produto interno $<,>$, a função real

$$\| \ \| : V \to \mathbb{R}$$

$$v \to \sqrt{< v, v >}$$

é uma *norma* em V: a norma induzida pelo produto interno. In particular, temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\forall v, w \in V \quad | < v, w > | \leq \|v\| \|w\|,$$

com igualdade se e só se $v = aw$, $a \in K$ (ou $v = 0$, ou $w = 0$, ou $v = w = 0$).

Proposição 0.5. *Um espaço vetorial V com produto interno $<,>$ é um espaço vetorial normado, coa norma induzida por o produto interno*

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}.$$

Prova. *Temos que:*

1. *Por definição* $\|v\| = \sqrt{< v, v >} \geq 0$ *,*
   e $\|v\| = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = \|v\|^2 =< v, v > \Leftrightarrow\; v = 0,$

2. $\|\alpha v\| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha^2 < v, v >} = |\alpha| \sqrt{< v, v >} = |\alpha| \|v\|,$

3. *Temos que ver que a desigualdade de Cauchy-Schwarz é válida. Para isso, é bastante repetir a prova do Teorema 0.3, substituindo o produto escalar $\cdot$ e a norma euclidiana $|\cdot|$ por o produto interno $<,>$ e a norma induzida $\|\cdot\|$ respectivamente. Daí, o resto segue:*

$$\|v + w\|^2 =< v + w, v + w >= \|v\|^2 + 2 < v, w > + \|w\|^2 \leq$$

$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

0.0.4 Normas em $\mathbb{R}^n$

A norma euclidiana não é a única norma possível em $\mathbb{R}^n$, e de fato utilizaremos também outras 2 normas:

1. a *norma da soma*: $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|_s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

2. a *norma do máximo*: $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|_m = \max_i \{|x_i|\}$.

Demonstraremos na frente que estas 3 normas de $\mathbb{R}^n$ são equivalentes (num sentido a especificar).

Dada uma norma $\|\|$ em $\mathbb{R}^n$, a *bola aberta* unitária e centrada na orígem é o conjunto

$$B_{\|\|} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

em quanto a *bola fechada* unitária e centrada na orígem é o conjunto

$$\overline{B}_{\|\|} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

A noção de bola depende da norma: as bolas euclidianas são 'redondas', más as outras não! Em particular, em $\mathbb{R}^2$ as bolas chama-se de discos, e temos (entre os outros) os seguintes discos abertos unitários (centrados na orígem):

$$\mathbb{D} = D_e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$$
$$D_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)|_s = |x| + |y| < 1\}$$
$$D_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|_m = \max\{|x|, |y|\} <\}.$$

0.0.5 Métrica

Uma métrica é, em palavras povres, uma função que permite de medir distâncias. Se $(V, \|\|)$ é um espaço normado, então a norma $\|\|$ induz uma métrica em V da seguinte forma:

$$\forall v, w \in V, d_{\|\|}(v, w) = \|v - w\|.$$

Em particular, a norma euclidiana induz em $\mathbb{R}^n$ a *métrica euclidiana*:

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d_E(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Já que a norma euclidiana é uma função de $\mathbb{R}^n$ até $\mathbb{R}$, temos que a métrica euclidiana é uma função $d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e tem as seguintes propriedades (i.e., para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, e $\alpha \in \mathbb{R}$):

1. é definida positiva: $x, y \in \mathbb{R}^n,\ d_E(x, y) \geq 0$ e $d_E(x, y) = 0 \iff x = y$;

2. é simétrica: $x, y \in \mathbb{R}^n,\ d_E(x, y) = d_E(y, x)$;

3. satisfaz a desigualdade triangular: $x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ d_E(x, z) \leq d_E(x, y) + d_E(y, z)$;

pois:

1. $|x| \geq 0$, e vale a igualdade se e só se $x = 0$;

2. se $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $|\alpha x| = |\alpha||x|$, assim $|-x| = |x|$, e então

$$d_E(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = d_E(y, x);$$

3. $d_E(x, z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y|+|y-z| = d_E(x, y)+d_E(y, z)$.

De fato, qualquer métrica induzida por uma norma satisfaz as propriedades acima, já que descendem das propriedades da norma. Assim, as normas da soma e do máximo inducem respectivamente em $\mathbb{R}^n$ as métricas da soma:

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d_S(x, y) = |x - y|_S = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$$

e do máximo:

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d_M(x, y) = |x - y|_M = \max_i\{|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|\},$$

e é fácil comprovar que ambas satisfazem as propriedades acima.

0.0.6 Espaços métricos

De fato, um espaço métrico é um conjunto com uma métrica definida sobre este. Más formalmente:

Definição 0.6. Um espaço métrico (M, d) é uma dupla, onde M é um conjunto e d é uma métrica sobre M, isso é, d é uma função:

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

$$(p, q) \to d(p, q),$$

tal que:

1. é definida positiva: $p, q \in M,\ d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) = 0 \iff p = q$;

2. é simétrica: $p, q \in M,\ d(p, q) = d(q, p)$;

3. satisfaz a desigualdade triangular: $p, q, r \in M,\ d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$.

Assim, qualquer espaço normado é um espaço métrico (não vale o vice-versa), já que a norma induz uma métrica. Um espaço normado tal que a métrica induzida é completa chama-se de *espaço de Banach*.