

Terceira aula

Na aula passada vimos como, num espaço vetorial com produto interno, o produto interno induz uma norma.

0.0.1 Espaços vetoriais com produto interno e espaços normados

Definição 0.1. Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função

$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$, satisfaz as seguintes propriedades:

1. simétrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
2. definida positiva: $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$;
3. bilinearidade (linearidade em cada uma das variáveis):
 - $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$,
 - $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Por outro lado, temos:

Definição 0.2. Seja V um espaço vetorial real. Uma norma em V é uma função real

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para cada $v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$:

1. é definida positiva: $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
2. é homogénea: $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$,
3. é subaditiva: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Um espaço vetorial que tenha uma norma chama-se de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*.

Perceba que se V é um espaço vetorial, V não tem uma definição de 'cumprimento' dos vetores nem de 'ângulo' entre vetores.

Por outro lado, se $(V, \langle, \rangle)$ é um espaço vetorial com produto interno $\langle, \rangle$, podemos generalizar a noção de 'ângulo' graças ao conceito de ortogonalidade, e daí podemos generalizar a noção de 'cumprimento' graças à norma induzida.

Definição 0.3. Seja $(V, \langle, \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno $\langle, \rangle$. Dizemos que $v, w \in V$ são *ortogonais* e escrevemos $v \perp w$ quando $\langle v, w \rangle = 0$.

Temos que $0 \in V$ é ortogonal a todo $v \in V$, já que $\langle 0, v \rangle = \langle 00, v \rangle = 0 \langle 0, v \rangle = 0$. Também temos que, para todo $v, w \in V$, podemos escrever $w = av + u$ com $a = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$ e $v \perp u$ (e claramente $u \in V$).

Isso implica que, se V é um espaço vetorial com produto interno $\langle, \rangle$, a função real

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

é uma *norma* em V : a norma induzida pelo produto interno. Em particular, temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\forall v, w \in V \quad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

com igualdade se e só se $v = aw$, $a \in K$ (ou $v = 0$, ou $w = 0$, ou $v = w = 0$).

Proposição 0.4. Cada espaço vetorial normado $(V, \langle, \rangle)$ é um espaço normado, com a norma induzida $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

0.1 Produto escalar e norma euclidiana

O *produto escalar*, que vamos indicar com $\cdot$, é o produto interno canônico para $\mathbb{R}^n$:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos a *norma euclidiana* da seguinte forma:

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

0.1.1 Normas em $\mathbb{R}^n$

A norma euclidiana não é a única norma possível em $\mathbb{R}^n$, e de fato utilizaremos também outras 2 normas:

1. a *norma da soma*: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|_s = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
2. a *norma do máximo*: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|_m = \max_i \{|x_i|\}$.

Demonstraremos na frente que estas 3 normas de $\mathbb{R}^n$ são equivalentes (num sentido a especificar).

Dada uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$, a *bola aberta* unitária e centrada na origem é o conjunto

$$B_{\|\cdot\|} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

em quanto a *bola fechada* unitária e centrada na origem é o conjunto

$$\overline{B}_{\|\cdot\|} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

A noção de bola depende da norma: as bolas euclidianas são 'redondas', más as outras não necessariamente! Em particular, em $\mathbb{R}^2$ as bolas chama-se de discos, e temos (entre os outros) os seguintes discos abertos unitários (centrados na origem):

$$\mathbb{D} = D_e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$$

$$D_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)|_s = |x| + |y| < 1\}$$

$$D_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|_m = \max\{|x|, |y|\} < 1\}.$$

0.1.2 Métrica

Uma métrica é, em palavras povres, uma função que permite de medir distâncias. Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, então podemos interpretar a norma $\|v\|$ de um vetor $v \in V$ como a *distância de v da origem*. Esta ideia pode servir de motivação pelo seguinte: se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, a norma $\|\cdot\|$ induz uma métrica em V da seguinte forma:

$$\forall v, w \in V, d_{\|\cdot\|}(v, w) = \|v - w\|.$$

Em particular, a norma euclidiana induz em $\mathbb{R}^n$ a *métrica euclidiana*:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d_E(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Já que a norma euclidiana é uma função de $\mathbb{R}^n$ até $\mathbb{R}$, temos que a métrica euclidiana é uma função $d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e tem as seguintes propriedades (i.e., para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, e $\alpha \in \mathbb{R}$):

1. é definida positiva: $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d_E(x, y) \geq 0$ e $d_E(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. é simétrica: $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d_E(x, y) = d_E(y, x)$;

3. satisfaz a desigualdade triangular: $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $d_E(x, z) \leq d_E(x, y) + d_E(y, z)$;

pois:

1. $|x| \geq 0$, e vale a igualdade se e só se $x = 0$;
2. se $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $|\alpha x| = |\alpha||x|$, assim $|-x| = |x|$, e então

$$d_E(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = d_E(y, x);$$

3. $d_E(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d_E(x, y) + d_E(y, z)$.

De fato, qualquer métrica induzida por uma norma satisfaz as propriedades acima, já que descendem das propriedades da norma. Assim, as normas da soma e do máximo induzem respectivamente em $\mathbb{R}^n$ as métricas da soma (ou métrica de Manhattan):

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d_S(x, y) = |x - y|_S = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

e do máximo (ou de Chebyshév, ou dos xadréz):

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d_M(x, y) = |x - y|_M = \max_i \{|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|\},$$

e é fácil comprovar que ambas satisfazem as propriedades acima.

Percebam que (trivialmente) mudando métrica mudam as distâncias. Consideremos o caso de $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana, de Manhattan, e do máximo. Consideremos a distância desde a origem de um ponto $x \in \mathbb{R}^2$, por exemplo $x = (6, 6)$, nas 3 métricas:

1. na métrica euclidiana, $d_E(x, 0) = |x| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = \sqrt{2 * 2 * 2 * 3 * 3} = 6\sqrt{2} < 6 * 1.5 = 9$,
2. na métrica de Manhattan, $d_S(x, 0) = |x|_S = |6| + |6| = 12$, (agora o termo 'de Manhattan' debería ser claro)
3. na métrica de Chebyshév, $d_M(x, 0) = \max\{|6|, |6|\} = 6$ (se você está jogando a Xedrez e tem o rei no 6, 6 e quer chegar até o ponto 0, 0, vai precisar mover o rei 6 vezes).

0.1.3 Espaços métricos

De fato, um espaço métrico é um conjunto com uma métrica definida sobre este. Más formalmente:

Definição 0.5. Um espaço métrico (M, d) é uma dupla, onde M é um conjunto e d é uma métrica sobre M , isso é, d é uma função:

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \rightarrow d(p, q),$$

tal que:

1. é definida positiva: $p, q \in M$, $d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$;
2. é simétrica: $p, q \in M$, $d(p, q) = d(q, p)$;
3. satisfaz a desigualdade triangular: $p, q, r \in M$, $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$.

Assim, qualquer espaço normado é um espaço métrico (não vale o vice-versa), já que a norma induz uma métrica. Um espaço normado tal que a métrica induzida é completa chama-se de *espaço de Banach*.