Quarta aula: espaços normados e espaços métricos. Abertos em $\mathbb{R}^n$, equivalência das normas em $\mathbb{R}^n$

Nas aula passada vimos como, num espaço normado, a norma induz uma métrica:

Espaços normados e espaços métricos

Seja V um espaço vetorial real. Uma **norma** em V é uma função real

$$\| \ \| : V \to \mathbb{R}$$

tal que, para cada $v, w \in V, \ \alpha \in \mathbb{R}$:

1. é definida positiva: $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \ \Leftrightarrow \ v = 0$,
2. é (absolutamente) homogénea: $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$,
3. é subaditiva: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Um espaço vetorial que tenha uma norma chama-se **espaço normado**.

Se $(V, \|\|)$ é um espaço normado, a norma $\|\|$ induz uma *métrica* em V da seguinte forma:

$$\forall v, w \in V, d_{\|\|}(v, w) = \|v - w\|.$$

Demonstramos que a métrica (induzida pela norma de um espaço normado) é uma funçao *real, definida positiva, simétrica e que satisfaz a desigualdade triangular.* Más em geral, temos que:
Um **espaço métrico** (M, d) é uma dupla, onde M é um conjunto e d é uma métrica sobre M, isso é, d é uma função:

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

$$(p, q) \to d(p, q),$$

tal que:

1. é definida positiva: $p, q \in M, \ d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) = 0 \ \Leftrightarrow \ p = q$;
2. é simétrica: $p, q \in M, \ d(p, q) = d(q, p)$;
3. satisfaz a desigualdade triangular: $p, q, r \in M, \ d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$.

Assim, qualquer espaço normado é um espaço métrico, más não vale o viceversa:

Exemplo: Seja M um conjunto qualquer (não vacío), a *métrica discreta* sobre M é definida por:

$$d(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \neq q \\ 0 & \text{se } p = q \end{cases}$$

Vamos ver que é uma métrica: é claramente definida positiva e simétrica, vamos ver se satisfaz a desigualdade triangular. Sejam $p, q, r \in M$, queremos ver que $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$. Se $p = r$ então $d(p,r) = 0$ e temos acabado. Se $p \neq r$, então temos possibilidades:

1. $q = p \neq r$, então $1 = d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r) = 0 + 1 = 1$,
2. $q = r \neq p$, então $1 = d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r) = 1 + 0 = 1$,
3. $q \neq r, p$, então $1 = d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r) = 1 + 1 = 2$;

e também temos acabado.

Normas e métricas de $\mathbb{R}^n$

A norma canónica de $\mathbb{R}^n$ é a norma euclidiana, que é induzida por o produto escalar:

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ |x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_i^2 + ... + x_n^2},$$

e que a sua vez induz a métrica euclidiana:

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d_E(x,y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Também temos (entre outras) a norma da soma:

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad |x|_s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

que induz a métrica da soma (ou métrica de Manhattan):

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d_S(x,y) = |x - y|_S = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|;$$

e a norma do máximo:

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad |x|_m = \max_i\{|x_i|\}.$$

que induz a métrica do máximo (ou de Chebyshév, ou dos xadréz):

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$d_M(x, y) = |x - y|_M = \max_i\{|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|\}.$$

Percebam que (trivialmente) mudando métrica mudam as distâncias. Consideremos o caso de $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana, de Manhattan, do máximo, e discreta. Consideremos a distância desde a orígem de um ponto $x \in \mathbb{R}^2$, por exemplo $x = (6, 6)$, nas 4 métricas:

1. na métrica euclidiana, $d_E(x, 0) = |x| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = \sqrt{2 * 2 * 2 * 3 * 3} = 6\sqrt{2} < 6 * 1.5 = 9$,
2. na métrica de Manhattan, $d_S(x, 0) = |x|_S = |6| + |6| = 12$,
3. na métrica de Chebyshév, $d_M(x, 0) = max\{|6|, |6|\} = 6$,
4. na métrica discreta, $d_d(x, 0) = 1$.

Bolas e discos abertos unitários de $\mathbb{R}^n$

Dada uma norma $\|\|$ em $\mathbb{R}^n$, a *bola aberta* unitária e centrada na orígem é o conjunto

$$B_{\|\|} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}.$$

Em $\mathbb{R}^2$ as bolas chama-se de discos, e temos (entre os outros) os seguintes discos abertos unitários (centrados na orígem):

$$\mathbb{D} = D_e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$$
$$D_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)|_s = |x| + |y| < 1\}$$
$$D_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|_m = \max\{|x|, |y|\} < 1\}.$$

Também podemos definir em $\mathbb{R}^n$ a *bola aberta* unitária e centrada na orígem *c. r. à métrica discreta*, e é:

$$B_{(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_d(x, 0) < 1\} = \{0\}.$$

0.0.1 Bolas e conjuntos abertos num espaço métrico

Seja (M, d) um espaço métrico. Para cada $m \in M$ e $\epsilon > 0 (\in \mathbb{R})$, a **bola aberta** centrada em m e com raio ϵ é o conjunto

$$B_{(m,\epsilon)} = \{p \in M \mid d(m, p) < \epsilon\} \subseteq X$$

Um subconjunto $U \subseteq M$ é **aberto em** M **com respeto à métrica** d se para cada $q \in U$ existe um $\epsilon(q) > 0$ tal que

$$B_{(q,\epsilon(q))} \subseteq U.$$

Isso é, cada ponto $x \in U$ é o centro de uma bola aberta centrada em x contida em U

Exemplos:

1. O espaço $\mathbb{R}^n$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ c.r.à métrica euclidiana, pois para cada $x \in \mathbb{R}^n$ temos $B_{x,1} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$,

2. Similmente, $\mathbb{R}^n$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ c.r.à métrica de Manhattan e de Chebyshév. Também é aberto c.r.à métrica discreta, com $r > 1$.

3. O conjunto $U = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} \subset \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$, em quanto o conjunto $V = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x <\leq 1\}$ não é.

4. O conjunto vacío é aberto em qualquer espaço métrico, pois não contem pontos, e assim a definição é trivialmente satisfeita.

5. Consideremos em $\mathbb{R}^n$ as métricas euclidiana, de Manhattan, de Chebyshév e discreta, e seja $x = (x_1, ..., x_n)$. O conjunto $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ é aberto na métrica discreta já que, para cada $r \leq 1$, temos $B_{(x,r} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_d(y, x) < r \leq 1\} = \{x\})$. Por outro lado, $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ não é aberto em ninhuma das outras métricas.

Utilizando a definição de conjunto aberto podemos definir equivalência entre diferentes métricas do mesmo conjunto:
Seja M um conjunto, e sejam d, d' duas métricas em M. Dizemos que d e d' são **topologicamente equivalentes**, e escrevemos $d \sim_{top} d'$, se para cada $U \subseteq M$ temos

$$U \text{ aberto em } (M, d) \;\Leftrightarrow\; U \text{ aberto em } (M, d').$$

Isso é, duas métricas são equivalentes (em M) se e só se definem os mesmos (sub-)conjunto abertos (em M).
Exemplo: Em $\mathbb{R}^n$, a métrica discreta não é equivalente à métrica euclidiana, nem à métrica de Manhattan, e nem à métrica de Chebyshév.

Proposição 0.1. *A equivalência topológica entre métricas de um mesmo espaço é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Seja (M, d) um espaço métrico, e d', d'' métricas topologicamente equivalentes à d. A reflexividade e a simetría são triviales (d é topologicamente equivalente à se mesma e também à d', já que por definição d define os mesmos abertos). Vamos ver que

$$U \text{ aberto em } (M, d') \;\Leftrightarrow\; U \text{ aberto em } (M, d'').$$

O conjunto $U \subseteq M$ é aberto c.r.à d', então é aberto c.r.à d pois $d' \sim_{top} d$, e então é aberto c.r.à d'' pois $d'' \sim_{top} d$. Também $V \subseteq M$ é aberto c.r.à d'', então é aberto c.r.à d pois $d'' \sim_{top} d$, e então é aberto c.r.à d' pois $d' \sim_{top} d$. □

0.0.2 Equivalência das normas euclidiana, da soma e do máximo em $\mathbb{R}^n$

Vamos ver agora que, em $\mathbb{R}^n$, as métricas euclidiana, de Manhattan e de Chebyshév são topologicamente equivalentes.

Proposição 0.2. *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se $\|\|$ é a norma euclidiana ou da soma ou do máximo, e B a bola na métrica induzida, temos $B_{x,r} \subset B_{0,k}$ com $k = \|x\| + r$.*

Demonstração. Para ver que $B_{x,r} \subset B_{0,\|x\|+r}$ queremos ver que, se $y \in B_{x,r}$, então $y \in B_{0,\|x\|+r}$. Por definição, $y \in B_{x,r}$ quando $\|y - x\| < r$, e então temos

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \leq r + \|x\|,$$

que equivale a dizer que $y \in B_{0,\|x\|+r}$. □

Proposição 0.3. *Sejam d_E, d_S, e d_M as métricas euclidiana, da soma e do máximo respectivamente, em $\mathbb{R}^n$. Então, para cada $x = (x_1, .., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$d_M(x, y) \leq d_E(x, y) \leq d_S(x, y) \leq n * d_M(x, y).$$

Demonstração. Claramente, para cada $x = (x_1, .., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$d_M(x, y) = max_i\{|x_1 - y_1|, .., |x_n - y_n|\} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + .. + (x_n - y_n)^2} = d_E(x, y).$$

Para ver que

$$d_E(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + .. + (x_n - y_n)^2} \leq |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = d_S(x, y),$$

repare que, sendo ambos positivos, é bastante demonstrar que:

$$(x_1 - y_1)^2 + .. + (x_n - y_n)^2 \leq (|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|)^2,$$

más isso é trivial porqué todo termo no segundo membro é positivo. Finalmente, trivialmente:

$$d_S(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq n * max_i\{|x_1 - y_1|, .., |x_n - y_n|\} = n * d_M(x,y).$$

□

Corolário 0.4. *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$,*

$$B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})} \subseteq B^S_{(x,\epsilon)} \subseteq B^E_{(x,\epsilon)} \subseteq B^M_{(x,\epsilon)}.$$

Demonstração. Queremos demosntrar que, se $y \in B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})}$, então $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$, e então $y \in B^E_{(x,\epsilon)}$, e então $y \in B^M_{(x,\epsilon)}$.

Començamos vendo que, se $y \in B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})}$, então $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$. Temos que $y \in B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})}$ quando $d_M(x,y) = max_i\{|x_1 - y_1|, .., |x_n - y_n|\} \leq \frac{\epsilon}{n}$, e queremos ver que $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$, isso é, que $d_S(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq \epsilon$. Pela Proposição anterior,

$$d_S(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq$$

$$\leq n * max_i\{|x_1 - y_1|, .., |x_n - y_n|\} = n * d_M(x,y) \leq n * \frac{\epsilon}{n} = \epsilon,$$

e então $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$.

Por outro lado, $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$ quando $d_S(x,y) \leq \epsilon$, e temos pela Proposição anterior:

$$d_E(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + .. + (x_n - y_n)^2} \leq |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq \epsilon,$$

e assim $y \in B^E_{(x,\epsilon)}$.

Finalmente, temos que

$$d_M(x,y) = max_i\{|x_1 - y_1|, .., |x_n - y_n|\} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + .. + (x_n - y_n)^2} = d_E(x,y) \leq \epsilon,$$

e então $y \in B^M_{(x,\epsilon)}$ □

Teorema 0.5. *Sejam d_E, d_S, e d_M as métricas euclidiana, da soma e do máximo respectivamente, em $\mathbb{R}^n$. Então*

$$d_M \sim_{top} d_E \sim_{top} d_S$$

Demonstração. Queremos demonstrar que:

U aberto em $(\mathbb{R}^n, d_M)$ $\Leftrightarrow$ U aberto em $(\mathbb{R}^n, d_S)$ $\Leftrightarrow$ U aberto em $(\mathbb{R}^n, d_E)$.

Lembramos que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é **aberto em $\mathbb{R}^n$ com respeto à métrica** d se cada $x \in U$ é o centro de uma bola aberta contida em U.

Então, queremos demonstrar que, se $x \in U$ é o centro de uma bola $B^M_{(x,\epsilon(x))}$ contida em U, então x é o centro de uma bola $B^E_{(x,\epsilon'(x))}$ contida em U, e então é o centro de uma bola $B^S_{(x,\epsilon''(x))} \subset U$ e finalmente é o centro de uma bola $B^M_{(x,\epsilon'''(x))} \subseteq U$. De forma compacta, queremos ver que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existem $\epsilon(x), \epsilon(x)', \epsilon(x)'', \epsilon(x)'''$ tal que

$$B^M_{(x,\epsilon'''(x))} \supseteq B^E_{(x,\epsilon''(x))} \supseteq B^S_{(x,\epsilon'(x))} \subseteq B^M_{(x,\epsilon(x))}.$$

Pelo Corolário anterior temos que, dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$,

$$B^M_{(x,\epsilon)} \supseteq B^E_{(x,\epsilon)} \supseteq B^S_{(x,\epsilon)} \supseteq B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})},$$

o que acaba a prova. $\square$