Sexta aula: noções de topología

Nas aula passada vimos como, num espaço métrico (M, d), a métrica induz uma **topología** em M. Vimos que, se (M, d) é um espaço métrico, $U \subseteq M$ é aberto quando cada $p \in U$ é o centro de uma bola aberta interamente contida em U.

Teorema 0.1. *Seja (M, d) um espaço métrico, e seja $\mathcal{T}$ o conjunto de todos os conjuntos abertos de M, c.r.à métrica d. Então:*

1. *M e $\emptyset$ são elementos de $\mathcal{T}$,*
2. *se $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}$, então $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,*
3. *se $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$, então $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.*

Seja (M, d) um espaço métrico. Um conjunto $U \subseteq M$ diz-se **fechado** em M c.r.à d quando o complementário $M \setminus U$ é aberto em M c.r.à d. Similmente, temos as seguintes propriedades dos conjuntos fechados:

Proposição 0.2. *Seja (M, d) um espaço métrico, então:*

1. *M e $\emptyset$ são conjuntos fechados em (M, d),*
2. *se $U_1, ..., U_n$ são conjuntos fechados de (M, d), então $\bigcup_{i=1}^n$ é um conjunto fechado em (M, d).*
3. *se $\{U_i\}_{i\in I}$ são conjuntos fechados de (M, d), então $\bigcap_{i\in I} U_i$ é um conjunto fechado em (M, d).*

Definição 0.3. Seja X um conjunto. Uma **topología** sobre X é um conjunto $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tal que:

1. X e $\emptyset$ são elementos de $\mathcal{T}$,
2. se $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}$, então $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,
3. se $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$, então $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Nesse caso, chamamos de $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um conjunto $U \subseteq X$ é **aberto** c.r.à $\mathcal{T}$ quando $U \in \mathcal{T}$, e é **fechado** quando $X \setminus U \in \mathcal{T}$.

Então, se (M, d) é um espaço métrico, e $\mathcal{T}$ é o conjunto de todos os conjuntos abertos de M, c.r.à métrica d, então $\mathcal{T}$ é uma topología para M. Isso

é: **a métrica induz uma topología**.
Se (M,d) é um espaço métrico e d' é uma métrica topologicamente equivalente à d, então d e d' definem os mesmos abertos, e assim d e d' definem a mesma topología sobre M.

Por outro lado, não toda topología vem de uma métrica. **Exemplos**

1. Seja X um conjunto qualquer, e seja $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Então $\mathcal{T}$ é uma topología, a topología **indiscreta**.

2. Seja $X = \mathbb{R}$, e $\mathcal{T}$ o conjunto contendo $\mathbb{R}$, $\emptyset$, e todo conjunto da forma (x, ∞), $x \in \mathbb{R}$. Então $\mathcal{T}$ é uma topología (notem que $(0,1)$ não é aberto nessa topología)

0.0.1 Noções de topología num espaço métrico

Seja (M,d) um espaço métrico, e $U \subseteq M$ então:

1. O **interior** $\mathring{U}$ de U é o maior aberto de (M,d) contido em U ($\mathring{U} \subseteq U$),

2. o **fecho** $\overline{U}$ de U é o menor fechado de (M,d) contendo U ($U \subseteq \overline{U}$),

3. a **fronteira** ∂U de U é a interseção $\overline{U} \cap \overline{M \setminus U}$,

4. Seja $m \in M$, uma **vizinhança** de m é qualquer conjunto contendo um aberto contendo m

5. O ponto $m \in M$ é **exterior** à $U \subseteq M$ se existe um a vizinhança de m interamente contida em $M \setminus U$

Percebam que em ningúm lugar utilizamos a métrica de M: as mesmas definições valem para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$. Porém, num espaço métrico (M,d) podemos dar definções más geométricas, e assim dizer que:

1. $m \in U \subseteq M$ é um **ponto interior** de U quando é centro de uma bola aberta contida em U (i.e.: $\exists r > 0 \mid B_{(m,r)} \subseteq U$, e o **interior** de U é o conjunto dos pontos interiores de U,

2. m é um **ponto da fronteira** de U quando toda bola aberta centrada em m contém pelo menos um ponto em U e um ponto em $M \setminus U$, e a **fronteira** de U é o conjunto dos pontos de fronteira de U.

Exemplos:

1. O interior de $U = (0,1]$ em $(\mathbb{R}, d_E)$ é o intervalo $(0,1)$, o fecho é $[0,1]$, e a fronteira é $\{0,1\}$.

2. Consideremos o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionáis em $(\mathbb{R}, d_E)$. Então o interior de $\mathbb{Q}$ é o conjunto vacío, em quanto a fronteira de $\mathbb{Q}$ é tudo $\mathbb{R}$, já que toda bola aberta (intervalo aberto) vai conter números racionáis e irracionáis.

Percebam que estas definições **dependem do espaço métrico onde estamos! Exemplo:** O interior de $(0,1]$ em $(\mathbb{R}, d_E)$ é $(0,1)$, e a fronteira é $\{0,1\}$. Porém, o interior de $(0,1]$ em $(\mathbb{R}^2, d_E)$ é vacío, e a fronteira é $[0,1]$.

Teorema 0.4. *Seja (M,d) um espaço métrico, e $U \subseteq M$. As seguintes são equivalentes:*

1. *U é aberto em (M,d),*

2. *cada ponto de U é um ponto interior de U,*

3. *U é uma vizinhança de cada ponto $u \in U$.*

Demonstração.

- $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$
  Se U é aberto de (M,d), então U é o maior aberto contido em U (já que trivialmente $U \subseteq U$), assim $U = \mathring{U}$. Então, se $u \in U$ também $u \in \mathring{U}$, e trivialmente U contem (é igual) a um aberto $\mathring{U}$ contendo u.

- $3 \Rightarrow 1$
  Se U é uma vizinhança de cada ponto $u \in U$, então para todo $u \in U$, U contem um aberto contendo u, e assim u é o centro de uma bola $B_{(u,r)} \subset U$, e então U é aberto.

$\square$

Teorema 0.5. *Seja (M,d) um espaço métrico. O conjunto $U \subseteq M$ é fechado se e só se contem a sua fronteira.*

Demonstração. Seja U fechado em M, e seja $u \in \partial U$. Se $u \notin U$, então $u \in M \setminus U$, que é aberto. Assim, posso achar uma bola aberta centrada em u completamente contida em $M \setminus U$. Más $u \in \partial U$, contradição!

Por outro lado, seja U um conjunto contendo todo suo ponto de fronteira. Se $p \notin U$, então $p \notin \partial U$, e então existe uma bola centrada em p contida interamente em $M \setminus U$ (isso é, p é um ponto exterior à U), e assim $M \setminus U$ é aberto, o que faz U fechado.

$\square$

0.0.2 Topología induzida

Seja (M, d) um espaço métrico, e $U \subset M$. Então

$$d_| : U \times U \to \mathbb{R}$$

é uma métrica sobre U, a métrica induzida. Assim, $(U, d_|)$ (que escrevemos simplesmente (U, d) para não ser pessados) é um espaço métrico.

Seja $A \subseteq U$. Notem que a definição de **aberto** depende do espaço métrico, assim, em (U, d):

- $A \subseteq U$ é aberto em (U, d) se cada $a \in A$ é o centro de uma bola aberta $B_{(a,r)}$ **de** M tal que $B_{(a,r)} \cap U \subset A$.

Exemplo: O interval $(0, 1]$ não é aberto em $(\mathbb{R}, d_E)$. Porém, é aberto em $([0, 1], d_E)$, pois $(0, 1] = (0, 2) \cap [0, 1]$.

0.0.3 Pontos isolados e pontos limite

Seja (M, d) um espaço métrico. Um ponto $m \in M$ diz-se **isolado** quando é uma bola aberta em M; isso é, quando existe $r > 0$ tal que $B_{(m,r)}$ não contem ninhum outro ponto de M.
Exemplos:

1. Considere $(\mathbb{R}, d_E)$, então todo $n \in \mathbb{Z}$ é um ponto isolado.
2. Considere $(\mathbb{R}, d_E)$, e seja $\overline{P} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/n, .., 0\}$. Então todo ponto de $\overline{P} \setminus \{0\}$ é ponto isolado.
3. Seja (M, d_d) espaço métrico discreto. Então todo ponto de M é isolado.

Seja (M, d) um espaço métrico, dizemos que $m \in M$ é um **ponto de accumulação / ponto limite** de $E \subseteq M$ quando toda vizinhança de m contém pelo menos um ponto de E diferente de m.

Observação: não pedimos $m \in M$.
Exemplos:

1. Conjuntos finitos não tem pontos de accumulação.
2. Em $(\mathbb{R}, d_E)$, o conjunto $\mathbb{Z}$ não tem pontos de accumulação.
3. Em $(\mathbb{R}, d_E)$, considere $I = [0, 1]$. Então todo ponto de I é ponto de accomulação, em quanto a fronteira é só $\{0, 1\}$.

4. Em $(\mathbb{R}, d_E)$, considere $B = I \cap \mathbb{Q}$. Então todo ponto de I é ponto de accumulação e de fronteira.

Teorema 0.6. *Seja (M, d) espaço métrico, $E \subset M$. Então E é fechado se e só se contem todo su ponto de accumulação.*

Demonstração. Començamos com demostrar que se E é fechado então contem todo su ponto de accumulação. Para obter uma contradição, suponhamos que y é ponto de accumulação de E e $y \in M \setminus E$. Ja que E é fechado, $M \setminus E$ é aberto, e então existe $r > 0$ tal que $B_{(y,r)} \subseteq M \setminus E$. Más y é um ponto de accumulação de E, então $B_{(y,r)}$ contem pontos de E: contradição.

Vamos ver que se E contem todo su ponto de accumulação então é fechado. Seja $y \in M \setminus E$, então y não é ponto de accumulação de E, então existe uma (vizinhança contendo um aberto contendo uma) bola aberta $B_{(y,r)} \cap E = \emptyset$. Isso é, $B_{(y,r)} \subseteq M \setminus E$, então $M \setminus E$ aberto, e assim E é fechado. □

Exercício: Seja E' o conjunto dos pontos de accumulação de $E \subset M$ em (M, d). Então $x \in E' \Leftrightarrow x \in \overline{E \setminus \{x\}}$.

0.0.4 $\mathbb{R}^n$: celas encaixadas e o Teorema de Bolzano-Weierstrass

Uma **cela aberta** J de $\mathbb{R}^n$ é o producto Cartesiano de n intervalos abertos:

$$J = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad x_i \in (a_i, b_i),\ i \in [1, n]\},$$

em quanto a **cela fechada** $\overline{J}$ é o producto Cartesiano de n intervalos fechados:

$$I = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad x_i \in [a_i, b_i],\ i \in [1, n]\}.$$

Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é **limitado** quando está contido em alguma cela.

Em $\mathbb{R}$, toda sequência enxaixada de intervalos fechados tem um ponto comun. Isso também é verdade em $\mathbb{R}^n$:

Teorema 0.7. *Seja (I_k) uma sequência de celas fechadas não vacías e encaixadas: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq .... \supseteq I_k \supseteq ....$ Então $\mathbb{R}^n$ contem um ponto $y \in \bigcap_k I_k$.*

Demonstração. Seja

$$I_k = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad x_i \in [a_{k,i}, b_{k,i}],\ i \in [1, n]\}.$$

Então, em cada coordenadas i temos que $[a_{k,i}, b_{k,i}]$ é uma sequência encaixadas de intervalos fechados, assim que tem um ponto em comun:

$$y_i \bigcap_k [a_{k,i}, b_{k,i}].$$

Assim, $y = (y_1, .., y_n) \in \bigcap_k I_k$. □

Teorema 0.8. ***Bolzano-Weierstrass.*** *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ limitado e contenente infinitos pontos contem um ponto de accomulação.*

Demonstração. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ limitado e contenente infinitos pontos. Já que é limitado, está contido numa cela: seja

$$I_1 = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_{1,i}, b_{1,i}],\ i \in [1, n]\}$$

a cela fechada que o contem. Divide I_1 em 2^n celas dividendo cada lado $[a_{1,i}, b_{1,i}]$ em 2. Já que B contem infinitos pontos, pelo menos uma dessas 2^n celas, seja I_2, contem infinitos pontos. Divide I_2 em 2^n celas dividendo cada lado $[a_{2,i}, b_{2,i}]$ em 2. Já que B contem infinitos pontos, pelo menos uma dessas 2^n celas, seja I_3, contem infinitos pontos. Repetindo esse procedimento obtemos uma sequência de celas fechadas não vacías e encaixadas: pelo teorema anterior existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \in \bigcap_k I_k$.

Vemos agora que y é um ponto de accumulação de B. Isso é, queremos ver que toda bola centrada em y contem um ponto de B diferente de y. Como $I_1 = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_{1,i}, b_{1,i}],\ i \in [1, n]\}$, seja $l(I_1) = max\{b_1 - a_1, .., b_n - a_n\} > 0$, o comprimento do lado maior de I_1, então temos que o comprimento do lado maior de I_k é

$$l(I_k) = \frac{(I_1)}{2^{k-1}} > 0.$$

Seja V uma vizinhança de y, então V contem uma bola aberta centrada em y, assim existe $r > 0$ tal que $B^E_{(y,r)} \subseteq V$. Se existir k grande bastante tal que $I_k \subseteq B^E_{(y,r)} \subseteq V$ temos acabado, já que I_k contem infinitos pontos de B e assim V contem pelo menos um ponto de B diferente de y. Este k existe, já que se $w \in I_k$, então

$$d_E(y, w) = \sqrt{(y_1 - w_1)^2 + .. + (y_n - w_n)^2} \leq$$

$$\leq d_S(y, w) = \sum_i |y_i - w_i| \leq$$

$$\leq n * max_i|y_i - w_i| \leq n * l(I_k) = \frac{n}{2^{k-1}} l(I_1).$$

Assim, por $r > \frac{n}{2^{k-1}} l(I_1)$, isso é:

$$2^{k-1} > \frac{n}{r} l(I_1) \quad \Leftrightarrow k - 1 \geq log_2(\frac{n}{r} l(I_1))$$

$I_k \subseteq V$.

□