

Septima aula: noções de topologia num espaço métrico

Seja (M, d) um espaço métrico, e $U \subseteq M$ então:

1. O **interior** $\overset{\circ}{U}$ de U é o maior aberto de (M, d) contido em U ($\overset{\circ}{U} \subseteq U$),
2. o **fecho** $\overline{U}$ de U é o menor fechado de (M, d) contendo U ($U \subseteq \overline{U}$),
3. a **fronteira** ∂U de U é a interseção $\overline{U} \cap \overline{M \setminus U}$,
4. Seja $m \in M$, uma **vizinhança** de m é qualquer conjunto contendo um aberto contendo m .
5. O ponto $m \in M$ é **exterior** à $U \subseteq M$ se existe uma vizinhança de m inteiramente contida em $M \setminus U$

Percebam que em ningún lugar utilizamos a métrica de M : as mesmas definições valem para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$.

Porém, num espaço métrico (M, d) podemos dar definições más geométricas, e assim dizer que:

1. $m \in U \subseteq M$ é um **ponto interior** de U quando é centro de uma bola aberta contida em U (i.e.: $\exists r > 0 \mid B_{(m,r)} \subseteq U$, e o **interior** de U é o conjunto dos pontos interiores de U ,
2. m é um **ponto da fronteira** de U quando toda bola aberta centrada em m contém pelo menos um ponto em U e um ponto em $M \setminus U$, e a **fronteira** de U é o conjunto dos pontos de fronteira de U .
3. Um ponto $m \in M$ diz-se **isolado** quando é uma bola aberta em M ; isso é, quando existe $r > 0$ tal que $B_{(m,r)}$ não contém nenhum outro ponto de M ,
4. Seja (M, d) um espaço métrico, dizemos que $m \in M$ é um **ponto de acumulação / ponto limite** de $E \subseteq M$ quando toda vizinhança de m contém pelo menos um ponto de E diferente de m .

Teorema 0.1. *Seja (M, d) um espaço métrico, e $U \subseteq M$. As seguintes são equivalentes:*

1. U é aberto em (M, d) ,
2. cada ponto de U é um ponto interior de U ,
3. U é uma vizinhança de cada ponto $u \in U$.

Teorema 0.2. *Seja (M, d) um espaço métrico. e $U \subseteq M$. As seguintes são equivalentes:*

1. U é fechado,
2. U contém sua fronteira,
3. U contém todo seu ponto limite

Topología induzida

Seja (M, d) um espaço métrico, e $U \subset M$. Então

$$d| : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma métrica sobre U , a métrica induzida. Assim, $(U, d|)$ (que escrevemos simplesmente (U, d) para não ser pesados) é um espaço métrico.

$A \subseteq U$ é **aberto em** (U, d) se cada $a \in A$ é o centro de uma bola aberta $B_{(a,r)}$ **de** M tal que $B_{(a,r)} \cap U \subset A$.

Percebam que estas definições **dependem do espaço métrico onde estamos!**

Exemplos:

1. O interior de $(0, 1]$ em $(\mathbb{R}, d_E)$ é $(0, 1)$, e a fronteira é $\{0, 1\}$,
2. o interior de $(0, 1]$ em $(\mathbb{R}^2, d_E)$ é vazio, e a fronteira é $[0, 1]$.
3. O intervalo $(0, 1]$ não é aberto em $(\mathbb{R}, d_E)$,
4. é aberto em $([0, 1], d_E)$, pois $(0, 1] = (0, 2) \cap [0, 1]$.

Exercício:(pag 79 Elon métrico) Seja E' o conjunto dos pontos de acumulação de $E \subset M$ em (M, d) . Então $x \in E' \Leftrightarrow x \in \overline{E} \setminus \{x\}$.

0.0.1 $\mathbb{R}^n$: celas encaixadas e o Teorema de Bolzano-Weierstrass

Uma **cela aberta** J de $\mathbb{R}^n$ é o producto Cartesiano de n intervalos abertos:

$$J = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad x_i \in (a_i, b_i), \quad i \in [1, n]\},$$

em quanto a **cela fechada** $\overline{J}$ é o producto Cartesiano de n intervalos fechados:

$$I = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad x_i \in [a_i, b_i], \quad i \in [1, n]\}.$$

Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é **limitado** quando está contido em alguma cela. Equivalentemente, numa bola da forma $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$.

Em $\mathbb{R}$, toda sequência encaixada de intervalos fechados tem um ponto comum. Isso também é verdade em $\mathbb{R}^n$:

Teorema 0.3. *Seja (I_k) uma sequência de celas fechadas não vacias e encaixadas: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_k \supseteq \dots$. Então $\mathbb{R}^n$ contém um ponto $y \in \bigcap_k I_k$.*

Demonstração. Seja

$$I_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_{k,i}, b_{k,i}], i \in [1, n]\}.$$

Então, em cada coordenadas i temos que $[a_{k,i}, b_{k,i}]$ é uma sequência encaixada de intervalos fechados, assim que tem um ponto em comum:

$$y_i \in \bigcap_k [a_{k,i}, b_{k,i}].$$

Assim, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \bigcap_k I_k$. □

Teorema 0.4. Bolzano-Weierstrass. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ limitado e contendo infinitos pontos contém um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ limitado e contendo infinitos pontos. Já que é limitado, está contido numa cela: seja

$$I_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_{1,i}, b_{1,i}], i \in [1, n]\}$$

a cela fechada que o contém. Divide I_1 em 2^n celas dividendo cada lado $[a_{1,i}, b_{1,i}]$ em 2. Já que B contém infinitos pontos, pelo menos uma dessas 2^n celas, seja I_2 , contém infinitos pontos. Divide I_2 em 2^n celas dividendo cada lado $[a_{2,i}, b_{2,i}]$ em 2. Já que B contém infinitos pontos, pelo menos uma dessas 2^n celas, seja I_3 , contém infinitos pontos. Repetindo esse procedimento obtemos uma sequência de celas fechadas não vacias e encaixadas: pelo teorema anterior existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \in \bigcap_k I_k$.

Vemos agora que y é um ponto de acumulação de B . Isso é, queremos ver que toda bola centrada em y contém um ponto de B diferente de y . Como $I_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_{1,i}, b_{1,i}], i \in [1, n]\}$, seja $l(I_1) = \max\{b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n\} > 0$, o comprimento do lado maior de I_1 , então temos que o comprimento do lado maior de I_k é

$$l(I_k) = \frac{l(I_1)}{2^{k-1}} > 0.$$

Seja V uma vizinhança de y , então V contém uma bola aberta centrada em y , assim existe $r > 0$ tal que $B_{(y,r)}^E \subseteq V$. Se existir k grande bastante tal que $I_k \subseteq B_{(y,r)}^E \subseteq V$ temos acabado, já que I_k contém infinitos pontos de B e assim V contém pelo menos um ponto de B diferente de y . Este k existe, já que se $w \in I_k$, então

$$\begin{aligned} d_E(y, w) &= \sqrt{(y_1 - w_1)^2 + \dots + (y_n - w_n)^2} \leq \\ &\leq d_S(y, w) = \sum_i |y_i - w_i| \leq \\ &\leq n * \max_i |y_i - w_i| \leq n * l(I_k) = \frac{n}{2^{k-1}} l(I_1). \end{aligned}$$

Assim, por $r > \frac{n}{2^{k-1}} l(I_1)$, isso é:

$$2^{k-1} > \frac{n}{r} l(I_1) \Leftrightarrow k-1 \geq \log_2\left(\frac{n}{r} l(I_1)\right)$$

$I_k \subseteq V$.

□

0.0.2 Conjuntos compactos

Seja K um subconjunto de um espaço métrico (M, d) .

1. Uma **cobertura** de K é uma família $\mathcal{C} = (C_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de M tal que $K \subset \bigcup_{i \in I} C_i$. (Isso é: para cada $k \in K$ existe pelo menos um C_i contendo k).
2. Uma cobertura $(C_i)_{i \in I}$ diz-se **aberta** quando todo C_i é aberto em (M, d) .
3. Uma cobertura $(C_i)_{i \in I}$ diz-se **finita** quando I é um conjunto finito.
4. Se existe $I' \subset I$ tal que $K \subset \bigcup_{i \in I'} C_i$, então $\mathcal{C} = (C_i)_{i \in I'}$ diz-se de **subcobertura**.

Um espaço métrico (M, d) diz-se **compacto** quando toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita.

Um subconjunto $K \subset M$ diz-se **compacto** quando toda cobertura aberta (em M) possui uma subcobertura finita; em outras palavras, quando (K, d) é um subespaço métrico compacto.

Exemplos:

1. Seja $K = \{x_1, \dots, x_m\}$ em $(\mathbb{R}^n, d_E)$. Então é claro que, se $(C_i)_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de K , então existe uma subcobertura de K contendo como máximo m elementos.
2. Seja $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ em $(\mathbb{R}, d_E)$. Seja $\mathcal{C} = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $C_n = (-1, n)$, então $H \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Seja $C_{n_1}, \dots, C_{n_n}$ uma coleção finita de subconjuntos de $\mathcal{C}$, e seja $M = \sup_i \{n_i\}$. Então temos que, para cada n_i , $C_{n_i} \subseteq C_M$, então

$$(-1, M) = C_M = \bigcup_{i=1}^n C_{n_i}.$$

Agora, temos que $M \in \mathbb{R}$ mas $M \notin C_M$. Assim, não existe uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$ contendo H , e assim H não é compacto.

3. Similmente, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ não são compactos.
4. Seja $H = (0, 1)$ em $(\mathbb{R}, d_E)$, define $C_n = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ para $n > 2$, e $\mathcal{C} = (C_n)_{n > 2}$. Então $H \subset \bigcup_{n > 2} C_n$. Seja $C_{n_1}, \dots, C_{n_n}$ uma coleção finita de subconjuntos de $\mathcal{C}$, e seja $M = \sup_i \{n_i\}$. Então temos que, para cada n_i , $C_{n_i} \subseteq C_M$, então

$$(\frac{1}{M}, 1 - \frac{1}{M}) = C_M = \bigcup_{i=1}^n C_{n_i}.$$

Más $\frac{1}{M} \notin C_M$, assim não pode existir uma união finita de conjuntos de $\mathcal{C}$ contendo H , e então H não é compacto.

5. Seja $I = [0, 1]$ em $(\mathbb{R}, d_E)$. Cada $x \in I$ está contido em algum aberto C_i , queremos ver que o intervalo está contido numa reunião finita de abertos. Seja $B_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$, $B'_{(\epsilon, \epsilon')} = (\epsilon - \epsilon', \epsilon + \epsilon')$, $B''_{(\epsilon', \epsilon'')} = (\epsilon' - \epsilon'', \epsilon' + \epsilon'')$, ..., $B^n_{(\epsilon^{n-1}, \epsilon^n)} = (\epsilon^{n-1} - \epsilon^n, \epsilon^{n-1} + \epsilon^n)$, então

$$[0, \epsilon^{n-1}] \subseteq \bigcup_{i=0}^n B^i_{(\epsilon^{i-1}, \epsilon^i)}.$$

Assim, seja X o conjunto dos pontos $x \in I$ tal que o intervalo $[0, x]$ esteja contido em alguma coleção finita de abertos $C_1, \dots, C_n$, isso é:

$$X = \{x \in I \mid \exists i \in [1, \dots, n] \text{ tal que } [0, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i\}.$$

Claramente X é um intervalo, já que se $x \in X$ e $0 \leq y < x$, então $[0, y] \subset [0, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i$ e $y \in X$. Assim, temos que $X = [0, x^*]$ ou $X = [0, x^*)$, onde $x^* = \sup X$. Vamos ver agora que $x^* \in X$ e logo que $x^* = 1$. Já que $x^* \in I$, existe um aberto C_* contendo-o, então tal que $(x^* - \epsilon, x^* + \epsilon) \in C_*$, então

$$[0, x^*] \subset [0, x^* + \epsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i \cup C_*$$

e assim $x^* \in X$. Temos que $x^* = 1$ pois $x^* = \max X$. De fato, se $x^* \neq 1$, definindo $C' = (x^* + \epsilon - \epsilon'', x^* + \epsilon + \epsilon'')$, então

$$[0, x^* + \epsilon] \subset [0, x^* + \epsilon + \epsilon'') \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i \cup C_* \cup C'$$

e $x^* < x^* + \epsilon \in X$. Mas $x^* = \max X$, contradição.

Vamos agora a demonstrar um Teorema muito importante:

Teorema 0.5. Heine-Borel. *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é fechado e limitado.*

Demonstração. Comencemos com ver que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então é fechado. Assim queremos ver que, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, então existe um conjunto aberto U tal que $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$. Seja

$$C_n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| > \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

Cada C_n é aberto em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, e percebe que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}.$$

Já que $x \notin K$, então $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Por outro lado, K é compacto, então existe $1, \dots, N$ tal que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^N C_n = C_N,$$

já que $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_N$. Então

$$K \subset C_N = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| > \frac{1}{N}\},$$

que implica que

$$K \cap U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \frac{1}{N}\} = \emptyset,$$

assim

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K,$$

é um aberto contendo x contido no complementar de K , e finalmente K é fechado.

Provamos agora que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então é limitado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, define

$$H_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < n\},$$

então

$$K \subset \mathbb{R}^n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n,$$

e já que K é compacto, existe $1, \dots, N$ tal que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^N H_n = H_N,$$

assim que K é limitado.

Vamos ver agora que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e limitado, então é compacto. Já que K é limitado, está contido numa cela, seja

$$K \subset I_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| \leq r, \ i \in [1, n], \ r > 0\},$$

e não sendo compacto temos

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i,$$

más K não está contido em nenhuma coleção finita de C_i . Divide I_1 em 2^n celas cortando cada lado de I_1 na metade. Então existe pelo menos uma cela, seja I_2 , tal que $K \cap I_2$ não está contida em nenhuma coleção finita de C_i (de outra forma K compacto e já!). Repete o procedimento, então achamos uma sequência (I_n) de celas não vacias e encaixadas. Pelo teoremas anteriores, existe $y \in \bigcap_n I_n$, e y é ponto limite de K , e então $y \in K$, pois K é fechado. Existe i tal que $y \in C_i$, e já que C_i é aberto, temos que

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B_{(y, \epsilon)}^E \subseteq C_i.$$

O comprimento dos lados de I_n é $\frac{r}{2^{n-1}}$, então, por

$$2^{n-1} > n \frac{r}{\epsilon},$$

temos

$$I_n \subset B_{(y,\epsilon)}^E \subseteq C_i$$

assim K é compacto, contradição. □