

Oitava aula: noções de topologia num espaço métrico

Uma **cela fechada** I é o producto Cartesiano de n intervalos fechados:

$$I = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_i, b_i], i \in [1, n]\}.$$

Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é **limitado** quando está contido em alguma cela. Equivalentemente, numa bola da forma $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$.

Teorema 0.1. *Seja (I_k) uma sequência de celas fechadas não vacias e encaixadas: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_k \supseteq \dots$. Então $\mathbb{R}^n$ contem um ponto $y \in \bigcap_k I_k$.*

Teorema 0.2. Bolzano-Weierstrass. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ limitado e contendo infinitos pontos contem um ponto de acumulação.*

0.0.1 Conjuntos compactos

Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $K \subset M$ diz-se **compacto** quando toda cobertura aberta (em M) possui uma subcobertura finita.

Exemplos:

1. Seja $H = (0, 1)$ em $(\mathbb{R}, d_E)$, define $C_n = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ para $n > 2$, e $\mathcal{C} = (C_n)_{n>2}$. Então $H \subset \bigcup_{n>2} C_n$. Seja $C_{n_1}, \dots, C_{n_n}$ uma coleção finita de subconjuntos de $\mathcal{C}$, e seja $M = \sup_i \{n_i\}$. Então temos que, para cada n_i , $C_{n_i} \subseteq C_M$, então

$$(\frac{1}{M}, 1 - \frac{1}{M}) = C_M = \bigcup_{i=1}^n C_{n_i}.$$

Más $\frac{1}{M} \notin C_M$, assim não pode existir uma união finita de conjuntos de $\mathcal{C}$ contendo H , e então H não é compacto.

2. Seja $I = [0, 1]$ em $(\mathbb{R}, d_E)$. Cada $x \in I$ está contido em algum aberto C_i , queremos ver que o intervalo está contido numa reunião finita de abertos. Seja $B_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$, $B'_{(\epsilon, \epsilon')} = (\epsilon - \epsilon', \epsilon + \epsilon')$, $B''_{(\epsilon', \epsilon'')} = (\epsilon' - \epsilon'', \epsilon' + \epsilon'')$, ..., $B^n_{(\epsilon^{n-1}, \epsilon^n)} = (\epsilon^{n-1} - \epsilon^n, \epsilon^{n-1} + \epsilon^n)$, então

$$[0, \epsilon^{n-1}] \subseteq \bigcup_{i=0}^n B^i_{(\epsilon^{i-1}, \epsilon^i)}.$$

Assim, seja X o conjunto dos pontos $x \in I$ tal que o intervalo $[0, x]$ esteja contido em alguma coleção finita de abertos $C_1, \dots, C_n$, isso é:

$$X = \{x \in I \mid \exists i \in [1, \dots, n] \text{ tal que } [0, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i\}.$$

Claramente X é um intervalo, já que se $x \in X$ e $0 \leq y < x$, então $[0, y] \subset [0, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i$ e $y \in X$. Assim, temos que $X = [0, x^*]$ ou $X = [0, x^*)$, onde $x^* = \sup X$. Vamos ver agora que $x^* \in X$ e logo que $x^* = 1$. Já que $x^* \in I$, existe um aberto C_* contendolo, então tal que $(x^* - \epsilon, x^* + \epsilon) \in C_*$, então

$$[0, x^*] \subset [0, x^* + \epsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i \cup C_*$$

e assim $x^* \in X$. Temos que $x^* = 1$ pois $x^* = \max X$. De fato, se $x^* \neq 1$, definindo $C' = (x^* + \epsilon - \epsilon'', x^* + \epsilon + \epsilon'')$, então

$$[0, x^* + \epsilon] \subset [0, x^* + \epsilon + \epsilon'') \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i \cup C_* \cup C'$$

e $x^* < x^* + \epsilon \in X$. Más $x^* = \max X$, contradição.

Vamos agora a demosntrar um Teorema muito importante:

Teorema 0.3. Heine-Borel. *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é fechado e limitado.*

Demonstração. Començamos com ver que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então é fechado. Assim queremos ver que, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, então existe um conjunto aberto U tal que $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$. Seja

$$C_n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| > \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

Cada C_n é aberto em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, e percebe que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}.$$

Já que $x \notin K$, então $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Por outro lado, K é compacto, então existe $1, \dots, N$ tal que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^N C_n = C_N,$$

já que $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_N$. Então

$$K \subset C_N = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| > \frac{1}{N}\},$$

que implica que

$$K \cap U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \frac{1}{N}\} = \emptyset,$$

assim

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K,$$

é um aberto contendo x contido no complementar de K , e finalmente K é fechado.

Provamos agora que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então é limitado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, define

$$H_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < n\},$$

então

$$K \subset \mathbb{R}^n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n,$$

e já que K é compacto, existe $1, \dots, N$ tal que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^N H_n = H_N,$$

assim que K é limitado.

Vamos ver agora que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e limitado, então é compacto. Já que K é limitado, está contido numa cela, seja

$$K \subset I_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| \leq r, \ i \in [1, n], \ r > 0\},$$

e não sendo compacto temos

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i,$$

más K não está contido em nenhuma coleção finita de C_i . Divide I_1 em 2^n celas cortando cada lado de I_1 na metade. Então existe pelo menos uma cela, seja I_2 , tal que $K \cap I_2$ não está contida em nenhuma coleção finita de C_i (de outra forma K compacto e já!). Repete o procedimento, então achamos uma sequência (I_n) de celas não vacias e encaixadas. Pelo teoremas anteriores,

existe $y \in \bigcap_n I_n$, e y é ponto limite de K , e então $y \in K$, pois K é fechado. Existe i tal que $y \in C_i$, e já que C_i é aberto, temos que

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B_{(y, \epsilon)}^E \subseteq C_i.$$

O comprimento dos lados de I_n é $\frac{r}{2^{n-1}}$, então, por

$$2^{n-1} > n \frac{r}{\epsilon},$$

temos

$$I_n \subset B_{(y, \epsilon)}^E \subseteq C_i$$

assim K é compacto, contradição. $\square$

0.0.2 Conjuntos conexos

Seja (M, d) um espaço métrico (topológico). Então M é **conexo** quando, se $M = A \cup B$ com A e B abertos, então $A \cap B \neq \emptyset$, ou A e/ou $B = \emptyset$.

O subconjunto $U \subset M$ é **conexo** quando (U, d) é um espaço métrico conexo, ou equivalentemente quando, se $U \subseteq A \cup B$ com A e B abertos (em M), então $A \cap B \neq \emptyset$, ou $A \cap U$ e/ou $B \cap U = \emptyset$.

Por outro lado, um subconjunto $U \subset M$ diz-se **disconexo** quando existem dos abertos (em M) A, B tal que

1. $U \subseteq A \cup B$,
2. $(A \cap U) \neq \emptyset$, $(B \cap U) \neq \emptyset$, and $(A \cap U) \cap (B \cap U) = \emptyset$.

Exemplos em $(\mathbb{R}, d_E)$:

1. O conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ é desconexo, pois podemos tomar $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 43/5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 43/5\}$.
2. O conjunto dos racionais $\mathbb{R}$ é desconexo, pois podemos tomar $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}\}$.
3. Se $0 < c < 1$, então os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > c\}$ dividem $I = [0, 1]$ em 2 conjuntos não vacíos, disjuntos e cuja união é I . Más só B é aberto, então isso não prova que I é desconexo. De fato, é conexo.

Proposição 0.4. Em $(\mathbb{R}, d_E)$ o intervalo unitário $I = [0, 1]$ é conexo.

Demonstração. Por contradição, suponhamos que A e B sejam conjuntos abertos tal que $I \cap A$ e $I \cap B$ são disjuntos, não vacíos e cuja união dai I . Nota que, sendo A e B abertos, ambos $I \cap A$ e $I \cap B$ não podem ser um ponto só (já que as interseções são abertas e um ponto só não é aberto em $(\mathbb{R}, d_E)$).

Então, podemos supor que existe $a \in A$ e $b \in B$ tal que $0 < a < b < 1$. Define

$$c = \sup\{x \in A \mid x < b\},$$

então $0 < c < 1$ e assim $c \in A \cup B$.

Lembramos que c é supremo do conjunto $A_b = \{x \in A \mid x < b\}$ quando:

1. para todo $x \in A_b$, $x \leq c$,
2. se $y \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A_b$ temos $x \leq y$, então $c \leq y$

Se $c \in A$, então $c \neq b$, e sendo A aberto, $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A$, assim $c < c + \frac{\epsilon}{2} \in A$ e $c < c + \frac{\epsilon}{2} < b$ (assim $c < c + \frac{\epsilon}{2} \in A_b$) contradicendo a definição (1) de c .

Similmente, se $c \in B$ então, sendo B aberto, temos $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset B$, então $c - \frac{\epsilon}{2} < c \in B$, contradicendo a definição (2) de c . $\square$

Teorema 0.5. Considere $(\mathbb{R}^n, d_E)$, então $\mathbb{R}^n$ é conexo.

Demonstração. Se $\mathbb{R}^n$ fosse desconexo, então existiriam abertos não vacíos A e B tal que $\mathbb{R}^n = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$. Seja $a \in A$, $b \in B$, e considere o segmento de reta S que une a com b :

$$S = \{a + t(b - a), \mid t \in [0, 1]\}.$$

Seja $A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid a + t(b - a) \in A\}$ e $B_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid a + t(b - a) \in B\}$, então A_1 e B_1 são abertos de $(\mathbb{R}, d_E)$ tal que $A_1 \cap I$ e $B_1 \cap I$ são disjuntos e não vacíos e $(A_1 \cap I) \cup (B_1 \cap I) = I$, contradicção. $\square$

Teorema 0.6. Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$ os únicos conjuntos abertos e fechados são $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$.

Demonstração. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ fosse aberto e fechado não vacío, então $B = \mathbb{R}^n \setminus A$ também, então A e B seriam abertos não vacíos disjuntos cuja união é $\mathbb{R}^n$, contradicção. $\square$

Teorema 0.7. *Seja (M, d) um espaço métrico conexo. Então os únicos conjuntos abertos e fechados são M e $\emptyset$.*

Demonstração. Se $A \subset M$ fosse aberto e fechado não vazio, então $B = M \setminus A$ também, então A e B seriam abertos não vazios disjuntos cuja união é M , contradição. $\square$