

Nona aula: Conjuntos conexos

0.0.1 Acabando coa compacidade...

Comencemos provando que o conjunto $[0, 1]$ é compacto em $(\mathbb{R}, d_E)$:

Cada $x \in I$ está contido em algum aberto C_i , queremos ver que o intervalo está contido numa reunião finita de abertos. Seja $B_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$, $B'_{(\epsilon, \epsilon')} = (\epsilon - \epsilon', \epsilon + \epsilon')$, $B''_{(\epsilon', \epsilon'')} = (\epsilon' - \epsilon'', \epsilon' + \epsilon'')$, ..., $B^n_{(\epsilon^{n-1}, \epsilon^n)} = (\epsilon^{n-1} - \epsilon^n, \epsilon^{n-1} + \epsilon^n)$, então

$$[0, \epsilon^{n-1}] \subseteq \bigcup_{i=0}^n B_{(\epsilon^{i-1}, \epsilon^i)}.$$

Assim, seja X o conjunto dos pontos $x \in I$ tal que o intervalo $[0, x]$ esteja contido em alguma coleção finita de abertos $C_1, \dots, C_n$, isso é:

$$X = \{x \in I \mid \exists i \in [1, \dots, n] \text{ tal que } [0, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i\}.$$

Claramente X é um intervalo, já que se $x \in X$ e $0 \leq y < x$, então $[0, y] \subset [0, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i$ e $y \in X$. Assim, temos que $X = [0, x^*]$ ou $X = [0, x^*)$, onde $x^* = \sup X$. Vamos ver agora que $x^* \in X$ e logo que $x^* = 1$. Já que $x^* \in I$, existe um aberto C_* contendo-o, então tal que $(x^* - \epsilon, x^* + \epsilon) \in C_*$, então

$$[0, x^*] \subset [0, x^* + \epsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i \cup C_*$$

e assim $x^* \in X$. Temos que $x^* = 1$ pois $x^* = \max X$. De fato, se $x^* \neq 1$, definindo $C' = (x^* + \epsilon - \epsilon'', x^* + \epsilon + \epsilon'')$, então

$$[0, x^* + \epsilon] \subset [0, x^* + \epsilon + \epsilon'') \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i \cup C_* \cup C'$$

e $x^* < x^* + \epsilon \in X$. Más $x^* = \max X$, contradição.

0.0.2 Propriedades do fecho

Proposição 0.1. *Em (M, d) , seja $X \subset M$, e seja X' o conjunto dos pontos limites de X . Então $\overline{X} = X \cup X'$.*

Demonstração. Nota que $\overline{X}$ e $X \cup X'$ são fechados, e sendo $\overline{X}$ o menor fechado contendo X , temos

$$X \subseteq \overline{X} \subseteq X \cup X'.$$

Sendo um conjunto fechado se e só se contem seus pontos limites, temos que

$$\overline{X} \supseteq X \cup X'.$$

□

Lemma 0.2. *Em (M, d) , sejam X e Y subconjuntos de M :*

1. $X \subset Y$ implica $\overline{X} \subset \overline{Y}$,
2. se X e Y são abertos disjuntos, então $\overline{X} \cap Y = \emptyset$.

Demonstração. (1) Por contradição, suponha que existe $x \in X'$ mas $x \notin Y'$. Então existe $r > 0$ tal que $B_{x,r} \cap Y = \emptyset$, enquanto $B_{x,r} \cap X \neq \emptyset$. Mas $X \subset Y$, então $\emptyset \neq (B_{x,r} \cap X) \subset (B_{x,r} \cap Y) = \emptyset$, absurdo.

(2) Sejam X e Y abertos disjuntos, e suponha que existe $x \in X' \cap Y$. Sendo x ponto limite de X , para todo $r > 0$ temos $B_{x,r} \cap X \neq \emptyset$, e sendo x no aberto Y , existe $\hat{r} > 0$ tal que $B_{x,\hat{r}} \subset Y$. Então existe $y \in B_{x,\hat{r}} \cap X \subset Y$, assim $y \in X \cap Y$, contradição. □

0.0.3 Conjuntos conexos

Seja (M, d) um espaço métrico (topológico). Uma **cisão** de M é uma decomposição $M = A \cup B$ onde A e B são abertos tal que $A \cap B = \emptyset$. Se A ou B são vacíos, a cisão é **trivial**. O espaço métrico M diz-se **conexo** quando não admite cisões não triviais, de outra forma diz-se desconexo.

Um subconjunto $U \subset M$ diz-se **conexo** quando é um subespaço conexo, isso é, quando existem A e B abertos tal que $A \cap U$ e $B \cap U$ são disjuntos, não vacíos e tem como união U .

Exemplos em $(\mathbb{R}, d_E)$:

1. O conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ é desconexo, pois podemos tomar $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 43/5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 43/5\}$.
2. O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é desconexo, pois podemos tomar $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}\}$.
3. Se $0 < c < 1$, então os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > c\}$ dividem $I = [0, 1]$ em 2 conjuntos não vacíos, disjuntos e cuja união é I . Mas só B é aberto, então isso não prova que I é desconexo. De fato, é conexo.

Proposição 0.3. Em $(\mathbb{R}, d_E)$ o intervalo unitário $I = [0, 1]$ é conexo.

Demonstração. Por contradição, suponhamos que exista uma cisão não trivial $I = A \cup B$. Nota que, sendo A e B abertos, ambos $I \cap A$ e $I \cap B$ não podem ser um ponto só (já que as interseções são abertas e um ponto só não é aberto em $(\mathbb{R}, d_E)$).

Sejam $a \in A$ e $b \in B$, e suponhamos que $0 < a < b < 1$. Define

$$A_b = \{x \in A \mid x < b\}.$$

Como A não é vazio e tem uma cota superior b , então existe $c = \sup A_b$. Claramente, $c \leq b$, e $c \in A \cup B$.

Lembramos que c é supremo do conjunto $A_b = \{x \in A \mid x < b\}$ quando:

1. para todo $x \in A_b$, $x \leq c$,
2. se $y \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A_b$ temos $x \leq y$, então $c \leq y$

Se $c \in A$, então $c \neq b$, e sendo A aberto, $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A$, assim $c < c + \frac{\epsilon}{2} \in A$ e $c < c + \frac{\epsilon}{2} < b$ (assim $c < c + \frac{\epsilon}{2} \in A_b$) contradicendo a definição (1) de c .

Similmente, se $c \in B$ então, sendo B aberto, temos $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset B$, então $c - \frac{\epsilon}{2} < c \in B$, contradicendo a definição (2) de c . $\square$

Exercício: Prova que $\mathbb{R}$ é conexo (Elon métrico, página 91).

Teorema 0.4. Considere $(\mathbb{R}^n, d_E)$, então $\mathbb{R}^n$ é conexo.

Demonstração. Se $\mathbb{R}^n$ fosse desconexo, então existiriam abertos não vazios A e B tal que $\mathbb{R}^n = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$. Seja $a \in A$, $b \in B$, e considere o segmento de reta S que une a com b :

$$S = \{a + t(b - a), \mid t \in [0, 1]\}.$$

Seja $A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid a + t(b - a) \in A\}$ e $B_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid a + t(b - a) \in B\}$, então A_1 e B_1 são abertos de $(\mathbb{R}, d_E)$ tal que $A_1 \cap I$ e $B_1 \cap I$ são disjuntos e não vazios e $(A_1 \cap I) \cup (B_1 \cap I) = I$, contradição. $\square$

Corolário 0.5. Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ são os únicos abertos e fechados.

Demonstração. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ fosse aberto e fechado não vazio, então $B = \mathbb{R}^n \setminus A$ também, então A e B seriam abertos não vazios disjuntos cuja união é $\mathbb{R}^n$, contradição. $\square$

De fato, isso é certo para qualquer espaço métrico:

Teorema 0.6. *Seja (M, d) um espaço métrico. As seguintes são equivalentes:*

1. M é conexo,
2. M e $\emptyset$ são os únicos abertos e fechados de M ,
3. Se $X \subset M$ tem fronteira vazia, então $X = M$ ou $X = \emptyset$.

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$ Se $A \subset M$ fosse aberto e fechado não vazio, então $B = M \setminus A$ também, então $M = A \cup B$ é uma cisão não trivial de M e então M é desconexo. Por outro lado ($2 \Rightarrow 1$) M é desconexo quando existe uma cisão não trivial $M = A \cup B$ com A e B abertos: assim $A = M \setminus B$ e $B = M \setminus A$, que implica B e A fechados.

$2 \Leftrightarrow 3$ Se $X \subset M$ é aberto então $X = \overset{\circ}{X}$, e então $X \cap \partial X = \emptyset$; enquanto se X é fechado $\partial X \subseteq X$. Então X é aberto e fechado quando $\partial X = X \cap \partial X = \emptyset$. $\square$

Lemma 0.7. *Em (M, d) , se C e D são uma cisão de M , e $Y \subset M$ é conexo, então $Y \subset C$ ou $Y \subset D$.*

Demonstração. Temos que C e D são abertos em M , disjuntos, não vazios e cuja união é M . Então $C \cap Y$ e $D \cap Y$ são abertos em Y , disjuntos e cuja união é Y : se um dos dois não fosse vazio, formariam uma cisão de Y . Já que Y é conexo, não tem cisão, assim ou $C \cap Y = \emptyset$ ou $D \cap Y = \emptyset$, e finalmente $Y \subset C$ ou $Y \subset D$. $\square$

Teorema 0.8. *Sejam $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos conexos no espaço métrico (M, d) . Se existe $a \in M$ tal que*

$$a \in \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ então } A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

é conexo

Demonstração. Por absurdo, suponha que $A = C \cup D$ é uma cisão de A . Então $a \in C$ ou $a \in D$, suponha $a \in C$. Sendo que, para cada i , A_i é conexo e contendo a , temos que, para cada i , $A_i \subset C$. Assim

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset C$$

e D é vazio. Mas C e D são uma cisão de A , então D não pode ser vazio: contradição. $\square$

A próxima Proposição diz que, se Y é construído anexando à um conjunto conexo algum/todos sus pontos limites, então Y é conexo

Proposição 0.9. *Se $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$ e X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Por contradição, suponhamos que $Y = C \cup D$ é uma cisão de Y : então $X \subset C$ ou $X \subset D$. Suponhamos $X \subset C$. Então $\overline{X} \subset \overline{C}$, e já que $\overline{C} \cap D = \emptyset$, temos $Y \cap D = \emptyset$. Más $Y = C \cup D$ é uma cisão de Y , contradição. $\square$

Corolário 0.10. *O fecho de um conjunto conexo é conexo.*