

Decima aula: Conjuntos conexos

Na aula passada, a gente começou provando umas propriedades do fecho:

Proposição 0.1. *Em (M, d) , seja $X, Y \subset M$, e sejam X', Y' os conjuntos dos pontos limites de X e Y respectivamente. Então:*

1. $\overline{X} = X \cup X'$,
2. $X \subset Y$ implica $\overline{X} \subset \overline{Y}$,
3. se X e Y são abertos disjuntos, então $\overline{X} \cap Y = \emptyset$.

0.0.1 Conjuntos conexos

Seja (M, d) um espaço métrico (topológico). Uma **cisão** de M é uma decomposição $M = A \cup B$ onde A e B são abertos não vazios tal que $A \cap B = \emptyset$. O espaço métrico M diz-se **conexo** quando não admite cisões, de outra forma diz-se desconexo.

Um subconjunto $U \subset M$ diz-se **conexo** quando é um subespaço conexo, isso é, quando existem A e B abertos tal que $A \cap U$ e $B \cap U$ são disjuntos, não vazios e tem como união U .

Proposição 0.2. *Em $(\mathbb{R}, d_E)$ o intervalo unitário $I = [0, 1]$ é conexo. Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, $\mathbb{R}^n$ é conexo.*

Exercício:

Em $(\mathbb{R}, d_E)$, os únicos conjuntos conexos são os intervalos.

Corolário 0.3. *Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ são os únicos abertos e fechados.*

Demonstração. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ fosse aberto e fechado não vazio, então $B = \mathbb{R}^n \setminus A$ também, então A e B seriam abertos não vazios disjuntos cuja união é $\mathbb{R}^n$, contradição. $\square$

De fato, isso é certo para qualquer espaço métrico:

Teorema 0.4. *Seja (M, d) um espaço métrico. As seguintes são equivalentes:*

1. M é conexo,
2. M e $\emptyset$ são os únicos abertos e fechados de M ,
3. Se $X \subset M$ tem fronteira vazia, então $X = M$ ou $X = \emptyset$.

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$ Se $A \subset M$ fosse aberto e fechado não vazio, então $B = M \setminus A$ também, então $M = A \cup B$ é uma cisão não trivial de M e então M é desconexo. Por outro lado ($2 \Rightarrow 1$) M é desconexo quando existe uma cisão não trivial $M = A \cup B$ com A e B abertos: assim $A = M \setminus B$ e $B = M \setminus A$, que implica B e A fechados.

$2 \Leftrightarrow 3$ Se $X \subset M$ é aberto então $X = \overset{\circ}{X}$, e então $X \cap \partial X = \emptyset$; enquanto se X é fechado $\partial X \subseteq X$. Então X é aberto e fechado quando $\partial X = X \cap \partial X = \emptyset$. $\square$

Exercício: Similmente prova que em (M, d) , se $U \subset M$ é conexo, então U e $\emptyset$ são os únicos abertos e fechados em (U, d) . Comencemos provar que, se existe A aberto e fechado (além de $\emptyset$ e U) em (U, d) , então U é desconexo. Sendo A aberto e fechado em (U, d) diferente de $\emptyset$ e U , $B = U \setminus A$ também é aberto e fechado em (U, d) diferente de $\emptyset$ e U . Então $A \cap U$ e $B \cap U$ são abertos de (U, d) (já que U é aberto em (U, d)), disjuntos e não vazios, tal que $(A \cap U) \cup (B \cap U) = (A \cap U) \cup ((U \setminus A) \cap U) = (A \cup (U \setminus A)) \cap U = U$.

Seja agora U desconexo, isso é, existem A e B abertos de (U, d) tal que $A \cap U$ e $B \cap U$ são disjuntos, não vazios, e tal que $(A \cap U) \cup (B \cap U) = U$. Então $A \cap U = U \setminus (B \cap U)$, e sendo $(B \cap U)$ aberto em (U, d) , $A \cap U$ é fechado em (U, d) . Mas A aberto em (U, d) , então $A \cap U$ também.

Lemma 0.5. Em (M, d) , se C e D são uma cisão de M , e $Y \subset M$ é conexo, então $Y \subset C$ ou $Y \subset D$.

Demonstração. Temos que C e D são abertos em M , disjuntos, não vazios e cuja união é M . Então $C \cap Y$ e $D \cap Y$ são abertos em Y , disjuntos e cuja união é Y : se um dos dois não fosse vazio, formariam uma cisão de Y . Já que Y é conexo, não tem cisão, assim ou $C \cap Y = \emptyset$ ou $D \cap Y = \emptyset$, e finalmente $Y \subset C$ ou $Y \subset D$. $\square$

Teorema 0.6. Sejam $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos conexos no espaço métrico (M, d) . Se existe $a \in M$ tal que

$$a \in \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ então } A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

é conexo

Demonstração. Por absurdo, suponha que $A = C \cup D$ é uma cisão de A . Então $a \in C$ ou $a \in D$, suponha $a \in C$. Sendo que, para cada i , A_i é conexo e contendo a , temos que, para cada i , $A_i \subset C$. Assim

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset C$$

e D é vazio. Más C e D são uma cisão de A , então D não pode ser vazio: contradição. $\square$

Corolário 0.7. *Em (M, d) , $U \subseteq M$ é conexo se e só se dois pontos quaisquer $a, b \in U$ estão contidos em algum conexo $C_{a,b} \subseteq U$*

Demonstração. Se U é conexo, então podemos pegar sempre $C_{a,b} = U$. Por outro lado, fixando $a \in U$, temos

$$U = \bigcup_{b \in U} C_{a,b},$$

que é conexo pelo resultado anterior. $\square$

A próxima Proposição diz que, se Y é construído anexando à um conjunto conexo algum/todos sus pontos limites, então Y é conexo

Proposição 0.8. *Se $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$ e X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Por contradição, suponhamos que $Y = C \cup D$ é uma cisão de Y : então $X \subset C$ ou $X \subset D$. Suponhamos $X \subset C$. Então $\overline{X} \subset \overline{C}$, e já que $\overline{C} \cap D = \emptyset$, temos $Y \cap D = \emptyset$. Más $Y = C \cup D$ é uma cisão de Y , contradição. $\square$

Corolário 0.9. *O fecho de um conjunto conexo é conexo.*

0.0.2 Intermezzo: continuidade em espaços topológicos

Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos, seja

$$f : X \rightarrow Y$$

uma função, e seja $a \in X$. Dizer que f é contínua em a é dizer que $f(x)$ vai ser perto à $f(a)$ quanto queremos se x é bastante perto à a . A Definição topológica é a seguinte:

Definição 0.10. Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos, a função

$$f : X \rightarrow Y$$

é contínua em $a \in X$ quando, para cada vizinhança V de $f(a)$ em (Y, τ_2) , existe uma vizinhança U de a em (X, τ_1) tal que $f(U) \subseteq V$.

Seja $f^{-1}(V)$ a **imagem inversa** de V :

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

então $f(U) \subseteq V$ é equivalente à $U \subseteq f^{-1}(V)$. Também percebam que, se $U \subseteq f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a , então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a . Assim podemos re-formular a definição como:

A função $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** em a quando para cada vizinhança V de $f(a)$ em (Y, τ_2) , $f^{-1}(V)$ é vizinhança de a em (X, τ_1) .

Teorema 0.11. *Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função. São equivalentes:*

1. f é contínua,
2. para cada V aberto em (Y, τ_2) , $f^{-1}(V)$ é aberto em (X, τ_1) ,
3. para cada K fechado em (Y, τ_2) , $f^{-1}(K)$ é fechado em (X, τ_1) .

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ Seja f contínua e V aberto em (Y, τ_2) , vamos ver que $f^{-1}(V)$ é aberto em (X, τ_1) . Se V é aberto, então é vizinhança de cada um dos seus pontos; $x \in f^{-1}(V)$ quando $f(x) \in V$, então sendo f contínua $f^{-1}(V)$ deve conter um aberto contendo x : assim $f^{-1}(V)$ é vizinhança de cada um dos seus pontos, então aberto.

$(2 \Rightarrow 1)$ Seja $a \in X$, e seja V' é uma vizinhança de $f(a)$ em (Y, τ_2) : V' contem um aberto V contendo $f(a)$. Então $a \in f^{-1}(V)$ e $f^{-1}(V)$ é aberto em (X, τ_1) : $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V')$ é uma vizinhança de a .

$(2 \Rightarrow 3)$ Se V é aberto em (Y, τ_2) , então $Y \setminus V$ é fechado em (Y, τ_2) : queremos $f^{-1}(Y \setminus V)$ fechado em (X, τ_1) . Más

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y \setminus V) &= \{x \in X : f(x) \in Y \setminus V\} = \\ &= \{x \in X : f(x) \notin V\} = X \setminus f^{-1}(V), \end{aligned}$$

que é fechado pois $f^{-1}(V)$ aberto em (X, τ_1) .

$(3 \Rightarrow 2)$ Por outro lado, se K é fechado em (Y, τ_2) , $Y \setminus K$ é aberto, e $f^{-1}(Y \setminus K) = X \setminus f^{-1}(K)$ é aberto, pois $f^{-1}(K)$ é fechado em (X, τ_1) . □

Teorema 0.12. *Sejam (M, d) e (N, d') espaços métrico, $X \subset M$ conexo, e seja $f : X \rightarrow N$ contínua. Então $f(X) \subset N$ é conexo.*

Demonstração. Se $f(X) = A \cup B$ é uma cisão de $f(X)$, então A e B são disjuntos, e também abertos e fechados em $f(X)$. Então $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são disjuntos, abertos e fechados, assim $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ é uma cisão de X . Sendo X conexo, a cisão é trivial: $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B) = \emptyset$, seja $f^{-1}(A) = \emptyset$. Então $A = \emptyset$, $f(X) = A \cup B$ é uma cisão trivial e $f(X)$ é conexo. $\square$

Corolário 0.13. *Seja (M, d) espaço métrico, $U \subseteq M$ conexo, e*

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

contínua. Então $f(U)$ é um intervalo. Em particular, se $a, b \in U$ tal que $f(a) < f(b)$ então, para todo d com $f(a) < d < f(b)$, existe $c \in U$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração. **Exercício** $f(U) \subset \mathbb{R}$ conexo, então $f(U)$ é um intervalo. Isso é, se $f(a), f(b) \in f(U)$ e $f(a) < f(b)$, então $[f(a), f(b)] \subset f(U)$. $\square$

0.0.3 Conexidade por caminhos

A definição de espaço conexo traduz matematicamente a intuição de conjunto feito por um pedaço só. Também podemos considerar um espaço conexo quando se podem unir 2 pontos qualquer do espaço sem sair do espaço: isso é, dados dois pontos no espaço, existe um *caminho* no espaço juntando os pontos.

Seja (M, d) um espaço métrico e sejam $a, b \in M$. Um **caminho** em M unindo a com b é uma **uma função contínua**

$$f : [0, 1] \rightarrow M \text{ tal que } f(0) = a \text{ e } f(1) = b.$$

Quando $a = b$ o caminho diz-se **fechado**. Se $f, g : [0, 1] \rightarrow M$ são dois caminhos tais que $f(1) = g(0)$, o **caminho justaposto** $f \vee g : [0, 1] \rightarrow M$ se define como:

$$f \vee g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{em } [0, 1/2] \\ g(2t - 1) & \text{on } [1/2, 1] \end{cases}$$

Também, se $f : [0, 1] \rightarrow M$ é um caminho que começa em $a = f(0)$ e acaba em $b = f(1)$, então $f^*(t) = f(1 - t)$ é um caminho que começa em b e acaba em a . Então se escrevemos $a \sim b$ para indicar que existe um caminho que começa em a e acaba em b , temos que $a \sim b$ é **uma relação de equivalência**.

Em (M, d) , $U \subseteq M$ diz-se **conexo com caminhos** quando dois pontos quaisquer de U podem ser ligados por um caminho em U .

Exemplos:

1. Seja V um espaço vetorial real. Chamamos de $U \subset V$ conjunto **convexo** quando, para todo $a, b \in U$, o segmento

$$[a, b] = \{(1 - t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$$

está contido em U . Claramente um conjunto convexo é conexo por caminhos.

2. Seja V um espaço vetorial real, então todo subespaço vetorial de V é convexo (usando a definição de espaço vetorial), e assim conexo por caminhos.
3. Toda bola num espaço vetorial normado é convexa.

Teorema 0.14. *Em (M, d) , se $U \subseteq M$, é conexo por caminhos, então é conexo.*

Demonstração. Seja $f : [0, 1] \rightarrow U$ um caminho ligando $a, b \in U$, então $a, b \in f([0, 1])$ e $f([0, 1]) \subset U$ é conexo. Assim quaisquer dois pontos de U pertencem a um conjunto conexo de U , e assim U é conexo. $\square$

Corolário 0.15. *Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, $\mathbb{R}^n$ é conexo.*

Demonstração. Sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial real, $\mathbb{R}^n$ é convexo, então conexo por caminhos, e então conexo. $\square$

Existem conjuntos conexos que não são conexos por caminhos