

Decimaprimera aula: Funções contínuas e conexidade

Na aula passada, demonstramos as seguintes propriedades dos conjuntos conexos:

Teorema 0.1. *Seja (M, d) um espaço métrico. As seguintes são equivalentes:*

1. M é conexo,
2. M e $\emptyset$ são os únicos abertos e fechados de M ,
3. Se $X \subset M$ tem fronteira vazia, então $X = M$ ou $X = \emptyset$.

Lemma 0.2. *Em (M, d) , se C e D são uma cisão de M , e $Y \subset M$ é conexo, então $Y \subset C$ ou $Y \subset D$.*

Teorema 0.3. *Sejam $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos conexos no espaço métrico (M, d) . Se existe $a \in M$ tal que*

$$a \in \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ então } A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

é conexo

Faltavam para demonstrar as seguintes:

Corolário 0.4. *Em (M, d) , $U \subseteq M$ é conexo se e só se dois pontos quaisquer $a, b \in U$ estão contidos em algum conexo $C_{a,b} \subseteq U$*

Demonstração. Se U é conexo, então podemos pegar sempre $C_{a,b} = U$. Por outro lado, fixando $a \in U$, temos

$$U = \bigcup_{b \in U} C_{a,b},$$

que é conexo pelo resultado anterior. $\square$

A próxima Proposição diz que, se Y é construído anexando à um conjunto conexo algum/todos sus pontos limites, então Y é conexo

Proposição 0.5. *Se $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$ e X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Por contradição, suponhamos que $Y = C \cup D$ é uma cisão de Y : então $X \subset C$ ou $X \subset D$. Suponhamos $X \subset C$. Então $\overline{X} \subset \overline{C}$, e já que $\overline{C} \cap D = \emptyset$, temos $Y \cap D = \emptyset$. Mas $Y = C \cup D$ é uma cisão de Y , contradição. $\square$

Corolário 0.6. *O fecho de um conjunto conexo é conexo.*

0.0.1 Intermezzo: continuidade em espaços topológicos

Definição 0.7. Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos, a função

$$f : X \rightarrow Y$$

é contínua em $a \in X$ quando, para cada vizinhança V de $f(a)$ em (Y, τ_2) , existe uma vizinhança U de a em (X, τ_1) tal que $f(U) \subseteq V$.

Seja $f^{-1}(V)$ a **imagem inversa** de V :

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

então $f(U) \subseteq V$ é equivalente à $U \subseteq f^{-1}(V)$. Também percebam que, se $U \subseteq f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a , então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a . Assim podemos re-formular a definição como:

A função $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** em a quando para cada vizinhança V de $f(a)$ em (Y, τ_2) , $f^{-1}(V)$ é vizinhança de a em (X, τ_1) .

Teorema 0.8. *Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função. São equivalentes:*

1. f é contínua,
2. para cada V aberto em (Y, τ_2) , $f^{-1}(V)$ é aberto em (X, τ_1) ,
3. para cada K fechado em (Y, τ_2) , $f^{-1}(K)$ é fechado em (X, τ_1) .

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ Seja f contínua e V aberto em (Y, τ_2) , vamos ver que $f^{-1}(V)$ é aberto em (X, τ_1) . Se V é aberto, então é vizinhança de cada um dos seus pontos; $x \in f^{-1}(V)$ quando $f(x) \in V$, então sendo f contínua $f^{-1}(V)$ deve conter um aberto contendo x : assim $f^{-1}(V)$ é vizinhança de cada um dos seus pontos, então aberto.

$(2 \Rightarrow 1)$ Seja $a \in X$, e seja V' é uma vizinhança de $f(a)$ em (Y, τ_2) : V' contém um aberto V contendo $f(a)$. Então $a \in f^{-1}(V)$ e $f^{-1}(V)$ é aberto em (X, τ_1) : $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V')$ é uma vizinhança de a .

$(2 \Rightarrow 3)$ Se V é aberto em (Y, τ_2) , então $Y \setminus V$ é fechado em (Y, τ_2) : queremos $f^{-1}(Y \setminus V)$ fechado em (X, τ_1) . Más

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y \setminus V) &= \{x \in X : f(x) \in Y \setminus V\} = \\ &= \{x \in X : f(x) \notin V\} = X \setminus f^{-1}(V), \end{aligned}$$

que é fechado pois $f^{-1}(V)$ aberto em (X, τ_1) .

(3 $\Rightarrow$ 2) Por outro lado, se K é fechado em (Y, τ_2) , $Y \setminus K$ é aberto, e $f^{-1}(Y \setminus K) = X \setminus f^{-1}(K)$ é aberto, pois $f^{-1}(K)$ é fechado em (X, τ_1) . $\square$

Teorema 0.9. *Sejam (M, d) e (N, d') espaços métrico, $X \subset M$ conexo, e seja $f : X \rightarrow N$ contínua. Então $f(X) \subset N$ é conexo.*

Demonstração. Se $f(X) = A \cup B$ é uma cisão de $f(X)$, então A e B são disjuntos, e também abertos e fechados em $f(X)$. Então $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são disjuntos, abertos e fechados, assim $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ é uma cisão de X . Sendo X conexo, a cisão é trivial: $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B) = \emptyset$, seja $f^{-1}(A) = \emptyset$. Então $A = \emptyset$, $f(X) = A \cup B$ é uma cisão trivial e $f(X)$ é conexo. $\square$

Corolário 0.10. *Seja (M, d) espaço métrico, $U \subseteq M$ conexo, e*

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

contínua. Então $f(U)$ é um intervalo. Em particular, se $a, b \in U$ tal que $f(a) < f(b)$ então, para todo d com $f(a) < d < f(b)$, existe $c \in U$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração. **Exercício** $f(U) \subset \mathbb{R}$ conexo, então $f(U)$ é um intervalo. Isso é, se $f(a), f(b) \in U$ e $f(a) < f(b)$, então $[f(a), f(b)] \subset f(U)$. $\square$

0.0.2 Conexidade por caminhos

A definição de espaço conexo traduz matematicamente a intuição de conjunto feito por um pedaço só. Também podemos considerar um espaço conexo quando se podem unir 2 pontos qualquer do espaço sem sair do espaço: isso é, dados dois pontos no espaço, existe um *caminho* no espaço juntando os pontos.

Seja (M, d) um espaço métrico e sejam $a, b \in M$. Um **caminho** em M unendo a com b é uma **função contínua**

$$f : [0, 1] \rightarrow M \text{ tal que } f(0) = a \text{ e } f(1) = b.$$

Quando $a = b$ o caminho diz-se **fechado**. Se $f, g : [0, 1] \rightarrow M$ são dois caminhos tais que $f(1) = g(0)$, o **caminho justaposto** $f \vee g : [0, 1] \rightarrow M$ se define como:

$$f \vee g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{em } [0, 1/2] \\ g(2t - 1) & \text{on } [1/2, 1] \end{cases}$$

Também, se $f : [0, 1] \rightarrow M$ é um caminho que começa em $a = f(0)$ e acaba em $b = f(1)$, então $f^*(t) = f(1 - t)$ é um caminho que começa em b e acaba em a . Então se escrevemos $a \sim b$ para indicar que existe um caminho que começa em a e acaba em b , temos que $a \sim b$ é **uma relação de equivalência**.

Em (M, d) , $U \subseteq M$ diz-se **conexo com caminhos** quando dois pontos quaisquer de U podem ser ligados por um caminho em U .

Exemplos:

1. Seja V um espaço vetorial real. Chamamos de $U \subset V$ conjunto **convexo** quando, para todo $a, b \in U$, o segmento

$$[a, b] = \{(1 - t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$$

está contido em U . Claramente um conjunto convexo é conexo por caminhos.

2. Seja V um espaço vetorial real, então todo subespaço vetorial de V é convexo (usando a definição de espaço vetorial), e assim conexo por caminhos.
3. Toda bola num espaço vetorial normado é convexa. **Exercício:** demonstra isso.

Teorema 0.11. *Em (M, d) (ou simplesmente (M, τ)), se $U \subseteq M$, é conexo por caminhos, então é conexo.*

Demonstração. Seja $f : [0, 1] \rightarrow U$ um caminho ligando $a, b \in U$, então $a, b \in f([0, 1])$ e $f([0, 1]) \subset U$ é conexo. Assim quaisquer dois pontos de U pertencem a um conjunto conexo de U , e assim U é conexo. $\square$

Corolário 0.12. *Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, $\mathbb{R}^n$ é conexo.*

Demonstração. Sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial real, $\mathbb{R}^n$ é convexo, então conexo por caminhos, e então conexo. $\square$

Este resultado também pode ser utilizado para demonstrar o Teorema anterior, mas tem importância por se mesmo:

Teorema 0.13. da Alfândega *Seja (M, d) (ou simplesmente (M, τ)) um espaço conexo por caminhos, seja $A \subset M$, e seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ um caminho com $\alpha(0) \in A$ e $\alpha(1) \in M \setminus A$. Então existe $\xi \in [0, 1]$ com $\alpha(\xi) \in \partial A$. Em particular, $\partial A \neq \emptyset$, então não é fechado e aberto, e M é conexo.*

Demonstração. Por hipótese, $\alpha(0) \in A \subset \overline{A}$, então $\alpha^{-1}(\overline{A}) \neq \emptyset$, e é fechado pois $\overline{A}$ é fechado e α contínua.

Similmente, $\alpha(1) \in M \setminus A \subset \overline{M \setminus A}$, então $\alpha^{-1}(\overline{M \setminus A}) \neq \emptyset$, e é fechado pois $\overline{M \setminus A}$ é fechado e α contínua.

Finalmente, sendo que $[0, 1]$ é o domínio de α , que $M = A \cup (M \setminus A) = \overline{A} \cup \overline{M \setminus A}$, e que $\alpha_{-1}(\overline{A} \cup \overline{M \setminus A}) = \alpha^{-1}(\overline{A}) \cup \alpha^{-1}(\overline{M \setminus A})$, temos

$$[0, 1] = \alpha^{-1}(\overline{A}) \cup \alpha^{-1}(\overline{M \setminus A}).$$

Então, $\alpha^{-1}(\overline{A})$ e $\alpha^{-1}(\overline{M \setminus A})$ são conjuntos fechados não vazios de $[0, 1]$ cuja união é $[0, 1]$: existe $\xi \in \alpha^{-1}(\overline{A}) \cap \alpha^{-1}(\overline{M \setminus A}) = \alpha^{-1}(\overline{A \cap M \setminus A}) = \alpha^{-1}(\partial A)$. $\square$

Exercício: prova que se $\overline{A}, \overline{B} \in [0, 1]$ não vazios cuja união é $[0, 1]$, então $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

É natural se perguntar se vale o viceversa: um conjunto conexo é conexo por caminhos? Em geral não, e aqui temos um **controexemplo**. Considere a função

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\rightarrow \sin(1/x). \end{aligned}$$

Sendo que f é contínua e $(0, \infty)$ conexo, $f(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ é conexo. Seja $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, \infty)\}$ o grafo de f , então $G(f)$ é conexo, pois a função

$$\begin{aligned} F : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow (x, f(x)) \end{aligned}$$

é contínua, e $G(f) = F(0, \infty)$. Percebamos que o fecho do conjunto $\overline{G(f)}$ é o conjunto $\overline{G(f)} = G(f) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, e pelo Corolário anterior $\overline{G(f)}$ é conexo. Por outro lado, não é conexo por caminhos, pois não tem caminho entre um ponto do intervalo $(\{0\} \times [-1, 1])$ e um ponto de $G(f)$.

0.0.3 Componentes conexas e conexidade local

Dado um espaço (M, d) (ou (M, τ)), existe uma forma natural de cortar o espaço em pedaços conexas (ou conexas por caminhos).

Definição 0.14. Dado M , define a relação de equivalência em M : $x \sim y$ quando existe um subespaço conexo (conexo por caminhos) de M contendo x e y . Chamamos as classes de equivalência **componentes conexas** (componentes conexas por caminhos)

As propriedades reflexivas e simétricas são triviales. A transitividade vem do Teorema 0.3 (pela conexidade), e da justaposição de caminhos (pela conexidade por caminhos).

Conexidade é uma propriedade útil, más as vezes é más útil que um espaço satisfaça uma condição de conexidade **local**: em palavras povres, um espaço é **localmente conexo** quando cada ponto tem uma vizinhança arbitrariamente pequena conexa.

Definição 0.15. Um espaço M diz-se **localmente conexo em** $x \in M$ se para cada vizinhança U de x , existe uma vizinhança conexa V de x contida em U . Se M é localmente conexo em cada ponto seu, então M é **localmente conexo**. Similmente, um espaço M diz-se **localmente conexo por caminhos em** $x \in M$ se para cada vizinhança U de x , existe uma vizinhança conexa por caminhos V de x contida em U . Se M é localmente conexo por caminhos em cada ponto seu, então M é **localmente conexo por caminhos**.

Sendo que um espaço conexo por caminhos é conexo, um espaço localmente conexo por caminhos é localmente conexo.

Irritantemente, conjuntos conexos não são necessariamente localmente conexos, e viceversa.

Exemplos

1. Em $(\mathbb{R}, d_E)$, cada intervalo é conexo e localmente conexo, conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos.
2. O espaço $(\mathbb{R}^n, d_E)$, e más geralmente cada espaço normado coa métrica (topología) induzida é localmente conexo por caminhos, então localmente conexo (e também conexo). De fato, dado $x \in \mathbb{R}^n$ e U vizinhança de x em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, por definição de vizinhança existe $r > 0$ tal que $B_{(x,r)}^E \subseteq U$, e $B_{(x,r)}^E$ é conexa por caminhos por ser convexa.
3. Considere em $(\mathbb{R}, d_E)$ o subespaço $W = (0, 1) \cup (2, 3)$ coa métrica induzida: é desconexo más localmente conexo por caminhos. Repare que também $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ coa métrica induzida é desconexo más localmente conexo por caminhos (pois $A = [0, \epsilon)$ é aberto em X : para todo $a \in A$ temos $r > 0$ tal que $B_{(a,r)} \cap A \subset X$. Más simplesmente, os abertos de X são $A \cap X$, A aberto em $\mathbb{R}$).
4. o Conjunto de Mandelbrot é conexo, más não sabemos se é localmente conexo.