Decimasegunda áula: Conexidade por caminhos, local, e sequências

A definição de espaço conexo traduz matemáticamente a intuição de conjunto feito por um pedaço só. Também podemos considerar um espaço conexo quando se podem unir 2 pontos qualquer do espaço sem sair do espaço: isso é, dados dois pontos no espaço, existe um *caminho* no espaço juntando os pontos.

Seja (M, d) um espaço métrico e sejam $a, b \in M$. Um **caminho** em M unendo a com b é uma **uma função contínua**

$$f : [0, 1] \to M \text{ tal que } f(0) = a \text{ e } f(1) = b.$$

Em (M, d), $U \subseteq M$ diz-se **conexo com caminhos** quando dois pontos quaisquer de U podem ser ligados por um caminho em U.

Teorema 0.1. *Em (M, d) (ou simplesmente (M, τ)), se $U \subseteq M$, é conexo por caminhos, então é conexo.*

Demonstração. Seja $f : [0, 1] \to U$ um caminho ligando a, $b \in U$, então a, $b \in f([0, 1])$ e $f([0, 1]) \subset U$ é conexo. Assim quaisquer dois pontos de U pertencem a um conjunto conexo de U, e assim U é conexo. $\square$

Corolário 0.2. *Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, $\mathbb{R}^n$ é conexo.*

Demonstração. Sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial real, $\mathbb{R}^n$ é convexo, então conexo por caminhos, e então conexo. $\square$

Este resultado também pode ser utilizado para demonstrar o Teorema anterior, más tem importância por se mesmo:

Teorema 0.3. ***da Alfândega*** *Seja (M, d) (ou simplesmente (M, τ)) um espaço conexo por caminhos, seja $A \subset M$, e seja $\alpha : [0, 1] \to M$ um caminho com $\alpha(0) \in A$ e $\alpha(1) \in M \setminus A$. Então existe $\xi \in [0, 1]$ com $\alpha(\xi) \in \partial A$. Em particular, $\partial A \neq \emptyset$, então não é fechado e aberto, e M é conexo.*

Demonstração. Por hipotésis, $\alpha(0) \in A \subset \overline{A}$, então $\alpha^{-1}(\overline{A}) \neq \emptyset$, e é fechado pois $\overline{A}$ é fechado e α contínua.
Similmente, $\alpha(1) \in M \setminus A \subset \overline{M \setminus A}$, então $\alpha^{-1}(\overline{M \setminus A}) \neq \emptyset$, e é fechado pois $\overline{M \setminus A}$ é fechado e α contínua.
Finalmente, sendo que $[0, 1]$ é o domínio de α, que $M = A \cup (M \setminus A) = \overline{A} \cup \overline{M \setminus A}$, e que $\alpha_{-1}(\overline{A} \cup \overline{M \setminus A}) = \alpha^{-1}(\overline{A}) \cup \alpha^{-1}(\overline{M \setminus A})$, temos

$$[0, 1] = \alpha^{-1}(\overline{A}) \cup \alpha^{-1}(\overline{M \setminus A}).$$

Então, $\alpha^{-1}(\overline{A})$ e $\alpha^{-1}(\overline{M \setminus A})$ são conjuntos fechados não vazíos de $[0,1]$ cuja união é $[0,1]$: existe $\xi \in \alpha^{-1}(\overline{A}) \cap \alpha^{-1}(\overline{M \setminus A}) = \alpha^{-1}(\overline{A} \cap \overline{M \setminus A}) = \alpha^{-1}(\partial A)$. $\square$

Exercício: prova que se $\overline{A}, \overline{B} \in [0,1]$ não vazíos cuja união é $[0,1]$, então $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

É natural se perguntar se vale o viceversa: um conjunto conexo é conexo por caminhos? Em geral não, e aquí temos um **controexemplo**.
Considere a função

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$

$$x \to sin(1/x).$$

Sendo que f é contínua e $(0,\infty)$ conexo, $f(0,\infty) \subset \mathbb{R}$ é conexo. Seja $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,\infty)\}$ o grafo de f, então $G(f)$ é conexo, pois a função

$$F : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$$

$$x \to (x, f(x))$$

é contínua, e $G(f) = F(0,\infty)$. Percebam que o fecho do conjunto $\overline{G(g)}$ é o conjunto $\overline{G(f)} = G(f) \cup (\{0\} \times [-1,1])$, e pelo Corolário anterior $\overline{G(f)}$ é conexo. Por outro lado, não é conexo por caminhos, pois não tem caminho entre um ponto do intervalo $(\{0\} \times [-1,1])$ e um ponto de $G(f)$.

0.0.1 Componentes conexas e conexidade local

Dado um espaço (M,d) (ou (M,τ)), existe uma forma natural de cortar o espaço em pedaços conexos (ou conexos por caminhos).

Definição 0.4. Dado M, define a relação de equivalência em M: $x \sim y$ quando existe um subespaço conexo (conexo por caminhos) de M contendo x e y. Chamamos as clases de equivalência **componentes conexas** (componentes conexas por caminhos)

As propriedades reflexivas e simétricas são triviales. A transitividade vem do Teorema **??** (pela conexidade), e da justaposição de caminhos (pela conexidade por caminhos).

Conexidade é uma propriedade útil, más as vezes é más útil que um espaço satisfaça uma condição de conexidade **local**: em palavras povres, um espaço é **localmente conexo** quando cada ponto tem uma vizinhança arbitrariamente pequena conexa.

Definição 0.5. Um espaço M diz-se **localmente conexo em** $x \in M$ se para cada vizinhança U de x, existe uma vizinhança conexa V de x contida em U. Se M é localmente conexo em cada ponto seu, então M é **localmente conexo**. Similmente, um espaço M diz-se **localmente conexo por caminhos em** $x \in M$ se para cada vizinhança U de x, existe uma vizinhança conexa por caminhos V de x contida em U. Se M é localmente conexo por caminhos em cada ponto seu, então M é **localmente conexo por caminhos**.

Sendo que um espaço conexo por caminhos é conexo, um espaço localmente conexo por camihos é localmente conexo.

Irritantemente, conjuntos conexos não são necessariamente localmente conexos, e viceversa.

Exemplos

1. Em $(\mathbb{R}, d_E)$, cada intervalo é conexo e localmente conexo, conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos.

2. O espaço $(\mathbb{R}^n, d_E)$, e más geralmente cada espaço normado coa métrica (topología) induzida é localmente conexo por caminhos, então localmente conexo (e também conexo). De fato, dado $x \in \mathbb{R}^n$ e U vizinhança de x em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, por definição de vizinhança existe $r > 0$ tal que $B^E_{(x,r)} \subseteq U$, e $B^E_{(x,r)}$ é conexa por caminhos por ser convexa.

3. Considere em $(\mathbb{R}, d_E)$ o subespaço $W = (0,1) \cup (2,3)$ coa métrica induzida: é disconexo más localmente conexo por caminhos. Repare que também $X = [0,1] \cup [2,3]$ coa métrica induzida é disconexo más localmente conexo por caminhos (pois $A = [0, \epsilon)$ é aberto em X: para todo $a \in A$ temos $r > 0$ tal que $B_{(a,r)} \cap A \subset X$. Más simplesmente, os abertos de X são $A \cap X$, A aberto em $\mathbb{R}$).

4. o Conjunto de Mandelbrot é conexo, más não sabemos se é localmente conexo.

0.0.2 Sequências em espaços métricos

Seja M um conjunto. Uma **sequência** $(x_n) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre M é uma aplicação dos conjunto dos naturáis em M:

$$x : \mathbb{N} \to M,$$

$$n \to x_n = x(n),$$

em quanto uma **subsequência** de (x_n) é uma restrição da função $n \to x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.

Exemplo: A sequência

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

$$n \to x_n = x(n) = 2^n$$

é $(1, 2, 4, 8, ...)$, em quanto a sua subsequência

$$x : \mathbb{N}' = 2\mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

$$n \to x_n = x(n) = 2^n$$

é $(1, 4, 16, ...)$.

Uma sequência **num espaço métrico** (M, d) é **limitada** quando o conjunto dos seus termos é limitado, isso é, quando existe $c > 0$ tal que para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_m) < c$.

Exemplos:

1. Em qualquer espaço M, uma sequência constante $x_n = a \in M$ para todo n é obviamente limitada, e também uma sequência que assume apenas um número finito de valores.
2. A sequência real $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to x_n = a^n$ com $|a| > 1$ não é limitada,
3. A sequência real $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to x_n = a^n$ com $|a| < 1$ é limitada,
4. Uma subsequência de uma sequência limitada é limitada.

Definição 0.6. Seja (M, d) espaço métrico, e seja (x_n) uma sequência em M. Um elemento $x \in M$ diz-se **limite de** (x_n) se, para toda vizinhança V de x, existe $K_v \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq K_n$, $x_n \in V$. Se (x_n) é uma sequência com limite $x \in M$, dizemos que (x_n) **converge à** x (ou **tende** para x), e a sequência é **convergente.** Uma sequência que não possui limite diz-se **divergente**.

Teorema 0.7. *Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico (M, d). Então $a \in M$ é limite de (x_n) se e só sé para cada $\epsilon > 0$ existe $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq K(\epsilon)$, $d(a, x_n) < \epsilon$.*

Demonstração. Exercício. $\square$

Proposição 0.8. *Seja (M, d) um espaço métrico. Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em M convergente para $a \in M$. Então, tomando $\epsilon = 1$, existe $K(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq K(\epsilon)$, $x_n \in B_{(a,1)}$. Assim, o conjunto dos valores da sequência está contido no conjunto

$$\{x_1, ..., x_{K(\epsilon)-1}\} \cup B_{(a,1)},$$

e sendo $m = max_{i=1,..,K(\epsilon)-1}\{d(a, x_i)\}$, e $\hat{m} = max\{m, 1\}$, este conjunto está contido na bola $B_{(a,\hat{m})}$. □

Exemplos:

1. A sequência real $n \to x_n = a^n$ com $|a| > 1$ não é limitada, então não é convergente.

2. Não vale o viceversa: a sequência real $n \to x_n = (-1)^n$ é limitada más não é convergente.

Proposição 0.9. ***Unicidade do limite.*** *Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração. Suponha (x_n) sequência em (M, d) convergendo para $a \neq b$, $a, b \in M$. Para todo ϵ existe n_a tal que, para todo $n \geq n_a$, $d(x_n, a) < \epsilon$, e também existe n_b tal que, para todo $n \geq n_b$, $d(x_n, b) < \epsilon$. Seja n maior de n_a e de n_b, então $d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) = 2\epsilon$. Assim, para todo epsilon, $0 \leq d(a, b) < 2\epsilon$, que implica $d(a, b) = 0$ e então $a = b$. □