

Decimaterceira aula: Sequências e subsequências em espaços métricos

Seja M um conjunto. Uma **sequência** $(x_n) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre M é uma aplicação do conjunto dos naturais **positivos** $\mathbb{N} = \mathbb{N}^+$ em M :

$$x : \mathbb{N} \rightarrow M,$$

$$n \rightarrow x_n = x(n),$$

em quanto uma **subsequência** de (x_n) é uma restrição da função $n \rightarrow x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.

Exemplo: A sequência

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$n \rightarrow x_n = x(n) = 2^n$$

é $(2, 4, 8, \dots)$, em quanto a sua subsequência

$$x : \mathbb{N}' = 2\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$n \rightarrow x_n = x(n) = 2^n$$

é $(4, 16, \dots)$.

Uma sequência **num espaço métrico** (M, d) é **limitada** quando o conjunto dos seus termos é limitado, isso é, quando existe $c > 0$ tal que para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_m) < c$.

Exemplos:

1. Em qualquer espaço M , uma sequência constante $x_n = a \in M$ para todo n é obviamente limitada, e também uma sequência que assume apenas um número finito de valores.
2. A sequência real $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \rightarrow x_n = a^n$ com $|a| > 1$ não é limitada,
3. A sequência real $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \rightarrow x_n = a^n$ com $|a| < 1$ é limitada,
4. Uma subsequência de uma sequência limitada é limitada.

Definição 0.1. Seja (M, d) espaço métrico, e seja (x_n) uma sequência em M . Um elemento $x \in M$ diz-se **limite de** (x_n) se, para toda vizinhança V de x , existe $K_v \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq K_v$, $x_n \in V$. Se (x_n) é uma sequência com limite $x \in M$, dizemos que (x_n) **converge à** x (ou **tende** para x), e a sequência é **convergente**. Uma sequência que não possui limite diz-se **divergente**.

Teorema 0.2. *Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico (M, d) . Então $a \in M$ é limite de (x_n) se e só se para cada $\epsilon > 0$ existe $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq K(\epsilon)$, $d(a, x_n) < \epsilon$.*

Demonstração. Exercício. □

Proposição 0.3. *Seja (M, d) um espaço métrico. Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em M convergente para $a \in M$. Então, tomando $\epsilon = 1$, existe $K(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq K(\epsilon)$, $x_n \in B_{(a,1)}$. Assim, o conjunto dos valores da sequência está contido no conjunto

$$\{x_1, \dots, x_{K(\epsilon)-1}\} \cup B_{(a,1)},$$

e sendo $m = \max_{i=1, \dots, K(\epsilon)-1} \{d(a, x_i)\}$, e $\hat{m} = \max\{m, 1\}$, este conjunto está contido na bola $B_{(a, \hat{m})}$. □

Exemplos:

1. A sequência real $n \rightarrow x_n = a^n$ com $|a| > 1$ não é limitada, então não é convergente.
2. Não vale o viceversa: a sequência real $n \rightarrow x_n = (-1)^n$ é limitada mas não é convergente.

Proposição 0.4. Unicidade do limite. *Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração. Suponha (x_n) sequência em (M, d) convergendo para $a \neq b$, $a, b \in M$. Para todo ϵ existe n_a tal que, para todo $n \geq n_a$, $d(x_n, a) < \epsilon$, e também existe n_b tal que, para todo $n \geq n_b$, $d(x_n, b) < \epsilon$. Seja n maior de n_a e de n_b , então $d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) = 2\epsilon$. Assim, para todo epsilon, $0 \leq d(a, b) < 2\epsilon$, que implica $d(a, b) = 0$ e então $a = b$. □

Obviamente:

Lemma 0.5. *Se a sequência (x_n) converge para a , então toda subsequência de (x_n) também.*

Demonstração. Seja V uma vizinhança de a , então existe $K_v \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq K_v$, $x_n \in V$. Seja $\mathbb{N}'$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, e $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência. Sendo $\mathbb{N}'$ infinito, existe $\hat{n}_k \in \mathbb{N}'$ tal que $\hat{n}_k > K_v$, assim para todo $n_k \geq \hat{n}_k$, $x_{n_k} \in V$. □

Corolário 0.6. Se a sequência (x_n) converge para a , então para todo $p \in \mathbb{N}$, (x_{n+p}) também

Demonstração. Temos que $(x_{n+p}) = (x_p, x_{1+p}, x_{2+p}, \dots)$ é uma subsequência de (x_n) . $\square$

Corolário 0.7. Se o limite da sequência (x_n) é a , e se $b \neq a$, então existe n_0 tal que, para todo $n > n_0$, $x_n \neq b$

Demonstração. Caso contrário, teríamos infinitos índices $\{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ tal que para todos eles $x_{n_i} = b$ (pois se os índices são finitos, n_0 é o máximo entre eles), então a subsequência constante $x_{n_i} = b$ teria limite $b \neq a$, que é o limite de (x_n) , absurdo. $\square$

Proposição 0.8. Se a sequência (x_n) possui duas subsequências convergendo para dois limites distintos, então é divergente.

Demonstração. Se a sequência (x_n) converge para a , então toda subsequência de (x_n) também. Então nenhuma subsequência pode possuir um limite $b \neq a$. $\square$

Exercício: Demonstre que, considerando a sequência (x_n) em (M, d) , as seguintes são equivalentes:

1. (x_n) NÃO converge para x ,
2. existe uma vizinhança V de x tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m = m(n) > n$ tal que $x_m \notin V$,
3. existe uma vizinhança V de x e uma subsequência (x'_n) de (x_n) tal que nenhum elemento de (x'_n) pertence a V .

Exemplo: Vamos ver que a sequência $(-1)^n = (1, -1, 1, -1, \dots)$ não converge. Os únicos limites possíveis são 1 e -1 (demonstre isso!): -1 não é limite pois nenhum termo da subsequência $(-1)^{2n}$ pertence à vizinhança $(-2, 0)$ de -1 , e 1 não é limite pois nenhum termo da subsequência $(-1)^{2n+1}$ pertence à vizinhança $(0, 2)$ de 1.

Definição 0.9. Considere as sequências (x_n) e (y_n) sequências em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, então definimos a **soma** dessas sequências como a sequência $(x_n + y_n)$, a diferença como a sequência $(x_n - y_n)$, e o **produto escalar** como a sequência **real** $(x_n \cdot y_n)$ obtida fazendo o produto escalar das componentes.

Também definimos o **produto** de $(c_n) \in \mathbb{R}$ com $(x_n) \in \mathbb{R}^n$ como a sequência (de $\mathbb{R}^n$) $(c_n y_n)$ e com $c \in \mathbb{R}$ como $(c x_n)$ e, se $c_n \neq 0$ para todo n , podemos também definir o **quociente** como a sequência (de $\mathbb{R}^n$) (x_n / c_n)

Exemplos:

1. Seja (x_n) a sequência de $\mathbb{R}^2$ constante $x_n = a = (a_1, a_2)$ para cada n , e (y_n) a sequência constante $y_n = b = (b_1, b_2)$. Então:

- $(x_n + y_n)$ é a sequência constante $x_n + y_n = a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ para cada n ,
- $(x_n - y_n)$ é a sequência constante $x_n - y_n = a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ para cada n ,
- $(x_n \cdot y_n)$ é a sequência constante $x_n \cdot y_n = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2)$ para cada n .

Se agora $(c_n) = c \in \mathbb{R}$, temos:

- $(c_n x_n)$ é a sequência constante $c_n x_n = (ca_1, ca_2)$ para cada n ,
- se $c \neq 0$, (x_n/c_n) é a sequência constante $x_n/c_n = (a_1/c, a_2/c)$ para cada n .

2. Em $\mathbb{R}$ sejam $(x_n) = (2, 4, 6, \dots, 2n, \dots)$ e $(y_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$, então:

- $(x_n + y_n) = (3, \frac{9}{2}, \frac{19}{3}, \dots, \frac{2n^2+1}{n}, \dots)$,
- $(x_n - y_n) = (1, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, \dots, \frac{2n^2-1}{n}, \dots)$,
- $(x_n y_n) = (2, 2, 2, \dots)$,
- $(3x_n) = (6, 12, 18, \dots, 6n, \dots)$,
- $(x_n/y_n) = (2, 8, 18, \dots, 2n^2, \dots)$.

Teorema 0.10. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $(\mathbb{R}^n, d_E)$ que convergem para x e y respectivamente:*

1. *a sequência $(x_n + y_n)$ converge para $x + y$, a sequência $(x_n - y_n)$ converge para $x - y$, e a sequência $(x_n \cdot y_n)$ de $\mathbb{R}$ converge para $x \cdot y$,*
2. *se (a_n) é uma sequência de $\mathbb{R}$ convergendo para a , $(a_n x_n)$ é uma sequência de $\mathbb{R}^n$ convergendo para ax ,*
3. *se (b_n) é uma sequência de $\mathbb{R}$ com $b_n \neq 0$ para todo n , convergendo para b , então $(b_n^{-1} x_n)$ é uma sequência de $\mathbb{R}^n$ convergendo para $b^{-1}x$.*

Demonstração. Perceba que, pela desigualdade triangular,

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

então, sendo que por hypothesis fixado $\epsilon > 0$ existe K_1 e K_2 tal que, para todo $n \geq K = \max\{k_1, k_2\}$

$$\|x_n - x\| < \epsilon/2 \text{ e } \|y_n - y\| < \epsilon/2,$$

obtemos que, fixado $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que, para todo $n > K$

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \epsilon,$$

e assim a sequência converge para $x + y$. O mesmo argumento demonstra que a sequência $(x_n - y_n)$ converge para $x - y$.

Para provar que a sequência $(x_n \cdot y_n)$ de $\mathbb{R}$ converge para $x \cdot y$, começamos coa estimativa:

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x \cdot y| &\leq |(x_n \cdot y_n - x_n \cdot y) + (x_n \cdot y - x \cdot y)| \leq \\ &\leq |(x_n \cdot y_n - x_n \cdot y)| + |(x_n \cdot y - x \cdot y)| = |x_n \cdot (y_n - y)| + |(x_n - x) \cdot y|, \end{aligned}$$

e agora utilizamos a desigualdade de Schwarz ($|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$):

$$|x_n \cdot (y_n - y)| + |(x_n - x) \cdot y| \leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|.$$

Perceba agora que, sendo (x_n) convergente, então é limitada, e assim existe $K > 0$ tal que, para todo n , $\|x_n\| < K$, então definimos $M = \max\{K, \|y\|\}$. Pela convergencia de (x_n) e (y_n) , fixado $\epsilon > 0$ existe K_1 e K_2 tal que, para todo $n \geq \hat{K} = \max\{K_1, K_2\}$, então:

$$\|y_n - y\| < \frac{\epsilon}{2M} \text{ e } \|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2M},$$

e assim, fixado $\epsilon > 0$, para todo $n \geq \hat{K}$ obtemos

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \\ &\leq M\|y_n - y\| + M\|x_n - x\| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon. \end{aligned}$$

□