Decimaquarta áula: Sequências e subsequências em espaços métricos

A gente fechou a última áula definindo soma e produto de sequências em $\mathbb{R}^n$:

Definição 0.1. *Considere as sequências* (x_n) *e* (y_n) *sequências em* $(\mathbb{R}^n, d_E)$*, então definimos a* ***soma*** *dessas sequências como a sequência* $(x_n + y_n)$*, a diferência como a sequência* $(x_n - y_n)$*, e o* ***produto escalar*** *como a sequência* ***real*** $(x_n \cdot y_n)$ *obtida fazendo o produto escalar das componentes.*

Também definimos o ***produto*** *de* $(c_n) \in \mathbb{R}$ *com* $(x_n) \in \mathbb{R}^n$ *como a sequência (de* $\mathbb{R}^n$*)* $(c_n y_n)$ *e com* $c \in \mathbb{R}$ *como* (cx_n) *e, se* $c_n \neq 0$ *para todo* n*, podemos também definir o* ***quociente*** *como a sequência (de* $\mathbb{R}^n$*)* (x_n/c_n)

E demonstrando o seguinte Teorema:

Teorema 0.2. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *sequências em* $(\mathbb{R}^n, d_E)$ *que convergem para* x *e* y *respetivamente:*

1. *a sequência* (x_n+y_n) *converge para* $x+y$*, a sequência* (x_n-y_n) *converge para* $x-y$*, e a sequência* $(x_n \cdot y_n)$ *de* $\mathbb{R}$ *converge para* $x \cdot y$*,*

2. *se* (a_n) *é uma sequência de* $\mathbb{R}$ *convergendo para* a*,* $(a_n x_n)$ *é uma sequência de* $\mathbb{R}^n$ *convergendo para* ax*,*

3. *se* (b_n) *é uma sequência de* $\mathbb{R}$ *com* $b_n \neq 0$ *para todo* n*, convergendo para* b*, então* $(b_n^{-1} x_n)$ *é uma sequência de* $\mathbb{R}^n$ *convergendo para* $b^{-1}x$*.*

Também percebemos que o Teorema vale não só em $\mathbb{R}^n$, más mais em geral em *Espaços vetorials com produto interno.*

0.1 Pontos de accumulação, fechados, abertos, e sequências

Hoje a gente vai caracterizar a *topologia em termos de sequências.* Isso é: vamos demonstrar os seguintes resultados:

1. Em (M, d), seja $X \subset M$, então $x \in X'$ sse existe uma sequência de pontos distintos $(x_n) \in X$ convergendo para $x \in M$;

2. Em (M, d), o conjunto $F \subset M$ é *fechado* sse para toda sequência (x_n) de F tal que $x_n \to x$, então $x \in F$;

3. Em (M, d), o conjunto $A \subset M$ é *aberto* sse para toda sequência (x_n) de M com limite $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in A$

Proposição 0.3. ***(Pontos de accumulação e sequências.)*** *Em (M, d), seja $X \subset M$, então $x \in X'$ sse existe uma sequência de pontos distintos $(x_n) \in X$ convergendo para $x \in M$.*

Demonstração. Assumimos existe uma sequência de pontos distintos $(x_n) \in X$ convergendo para $x \in M$, vamos ver que $x \in X'$

1. $x = \text{limite}\, x_n$, então para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ temos $x_n \in B_{(x,\epsilon)}$,

2. assim $X \cap B_{(x,\epsilon)} \neq \emptyset$ e $x \in X'$.

Vamos assumir agora que $x \in X'$, e vamos ver que existe uma sequência de pontos distintos $(x_n) \in X$ convergendo para $x \in M$.

1. $x \in X'$, então para todo $\epsilon > 0$ temos $X \cap B_{(x,\epsilon)} \neq \emptyset$.

2. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $X \cap B_{(x,\frac{1}{n})} \neq \emptyset$.

3. Define a sequência (x_n) escolhendo os pontos $x_1, ..., x_n$ tal que $x_{n-1} \neq x_n \in X \cap B_{(x,\frac{1}{n})}$.

4. Então $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$, e para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d(x, x_n) < 1/n \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$, e assim $\lim x_n = x$.

□

Proposição 0.4. ***(Fechados e sequências.)*** *Em (M, d), o conjunto $F \subset M$ é fechado sse para toda sequência (x_n) de F tal que $x_n \to x$, então $x \in F$.*

Demonstração. Um conjunto $F \subset M$ de um espaço métrico (M, d) é fechado sse contem todo su ponto de accumulação. Então, se F é fechado, $F' \subset F$, então se $(x_n) \in F$ converge para $x \in M$, pela Proposição anterior 0.3 temos $x \in F' \subseteq F$, e então $x \in F$.
Seja agora F um conjunto de (M, d) tal que toda sequência convergente de F tem limite em F. Pela Proposição anterior 0.3 temos que $x \in F'$ quando existe uma sequência $(x_n) \in F$ convergendo para x. Assim F contem todo su ponto de accumulação, e assim F é fechado. □

Proposição 0.5. ***(Abertos e sequências.)*** *Em (M, d), o conjunto $\emptyset \neq A \subset M$ é aberto sse para toda sequência (x_n) de M com limite $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in A$*

Demonstração. Seja $A \subset M$ aberto, e (x_n) sequência de M com limite $x \in A$. Sendo A aberto, existe um $\epsilon > 0$ tal que $B_{(x,\epsilon)} \subset A$. Sendo (x_n) convergente, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \epsilon$. Assim, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in B_{x,\epsilon} \subset A$.
Seja agora (x_n) sequência de $M \setminus A$, e seja $x = \lim x_n$. Então $x \notin A$, pois em caso contrário existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in A$, más $(x_n) \in M \setminus A$. Então $M \setminus A$ é fechado pela Proposição anterior 0.4, e assim A é aberto. □

Exemplos:

1. Se (x_n) é uma sequência de $(\mathbb{R}, d_E)$ convergendo para $a \in \mathbb{R}$, e $a > b \in \mathbb{R}$, então para todo n suficientemente grande temos que $x_n > b$. De fato, o conjunto $A = (b, \infty)$ é aberto em $(\mathbb{R}, d_E)$, e sendo (x_n) uma sequência com limite $a \in A$, pela Proposição 0.5 temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in A$, e assim $x_n > b$.

2. Por outro lado, se (x_n) é uma sequência de $(\mathbb{R}, d_E)$ e $x_n \leq b$ para n arbitrariamente grande, e se existe $a = \text{limite}\, x_n$, então $a \leq b$. De fato, o conjunto $B = (-\infty, b]$ é fechado em $(\mathbb{R}, d_E)$, e sendo $(x_n) \in B$, se (x_n) converge o limite também pertenece à B.

0.2 Sequências de Cauchy e espaços completos

Tem outra propriedade topológica que podemos caracterizar por sequências: a *compacidade*. Para chegar até lá, precisamos antes definir *espaços completos*, e para isso vamos precisar do conceito de *sequência de Cauchy*. Em palavras povres, uma sequência é de Cauchy quando seu termos se tormam cada vez mais próximos.

Definição 0.6. *Uma sequência (x_n) de um espaço métrico (M, d) diz-se sequência de Cauchy quando para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$ temos*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Perceba que, uma sequência $(x_n) \in A \subset M$ num subconjunto A não fechado de um espaço métrico (M, d) podaría ser convergente em M más não em A. Por outro lado, se (x_n) é de Cauchy em M também é de Cauchy em A. Isso é: ser de Cauchy é uma propriedade *intrínseca* da sequência.
Também percebam que se a sequência é convergente, todo termo se aproxima ào limite, assim que também os termos da sequência devem se aproximar uns aos outros:

Proposição 0.7. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Se (x_n) converge para a, então para todo $\epsilon > 0$ existe $n \geq n_0$ tal que $d(x_n, a) < \epsilon/2$, então paa todo $m, n \geq n_0$ temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

$\square$

Não vale o viceversa! Exemplo (1):
Seja $(x_n) \in \mathbb{Q}$ uma sequência de $(\mathbb{R}, d_E)$ convergendo para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Então (x_n) é de Cauchy, más evidentemente não converge em $(\mathbb{Q}, d_E)$.

Esse exemplo sugere que uma sequência de Cauchy não converge num espaço só quando 'faltam pontos no espaço'.

Proposição 0.8. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (M, d). Então para $\epsilon = 1$ existe n_0 tal que, para todo $m, n \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < 1$. Logo temos que $x_n \in B_{(x_{n_0}, 1)}$ para todo $n \geq n_0$, e então

$$\{x_1, ..., x_n, ...\} \subseteq \{x_1, .., x_{n_0 - 1}\} \cup B_{(x_{n_0}, 1)}.$$

$\square$

Não vale o viceversa! Exemplo (2):
Considere a sequência de $(x_n) = (-1)^n$ de $(\mathbb{R}, d_E)$: é limitada más não é de Cauchy.

Proposição 0.9. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (para o mesmo limite).*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (M, d), e seja (x_{n_k}) uma subsequência convergendo para $x \in M$: vamos ver que (x_n) também converge para x.

1. Sendo que (x_{n_k}) converge para x, então para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n_k \geq n_0$,

$$d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2.$$

2. Sendo (x_n) de Cauchy, dado o $\epsilon > 0$ anterior existe n_1 tal que, para todo $n, m \geq n_1$,

$$d(x_n, x_m) < \epsilon/2.$$

3. Seja $N = max\{n_0, n_1\}$, então para todo $n \geq N$ tomamos $n_k \geq N$ e obtemos

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x, x_{n_k}) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

Esta Proposição renforça a intuição formulada depois o Exemplo (1): uma sequência de Cauchy não converge num espaço só quando 'faltam pontos no espaço'. Quando essos pontos não faltam chamamos o espaço de *completo*.

Definição 0.10. *Um espaço métrico* (M, d) *diz-se completo quando toda sequência de Cauchy é convergente.*

Exemplo: O espaço $(\mathbb{Q}, d_E)$ não é completo.

Notação:

1. Um espaço vetorial normado completo diz-se *espaço de Banach*;
2. um espaço vetorial com produto interno completo respéito à norma induzida pelo produto interno diz-se *espaço de Hilbert*.

Proposição 0.11. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de um qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração.

- Seja $N \subset M$ fechado em (M, d), vamos ver que (N, d) é completo.
  1. Se $(x_n) \in N$ é uma sequência de Cauchy, então (x_n) converge à $x \in M$, pois M é completo.
  2. Sendo N fechado, temos que $x \in N$, e então N é completo.
- Por outro lado, seja (N, d) subespaço completo de (M, d), $(x_n) \in N$ sequência convergendo para $x \in M$, vamos ver que $x \in N$ (e assim N é fechado).
  1. Sendo (x_n) convergente em M, é uma sequência de Cauchy.
  2. Sendo (N, d) completo, (x_n) tem limite em N.
  3. Assim pela unicidade do limite, $x \in N$.

□

0.2.1 Destaque para $(\mathbb{R}, d_E)$

Uma sequência de números reais

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

diz-se *crescente* quando $x_1 < x_2 < ... < x_n < ..$, ou em outras palávras quando para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n < x_{n+1}$. No caso a desigualdade não for stricta: quando para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n < x_{n+1}$, a sequência diz-se *não descescente*. Analogalmente, se para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n > x_{n+1}$ a sequência é *descrescente*, e no caso a desigualdade não for stricta diz-se *não crescente*. Em todos casos a sequência é *monótona*. A seguinte proposição é muito útil:

Teorema 0.12. ***(Teorema da convergência monótona)*** *Toda sequência monótona limitada de numeros reais é convergente.*

Demonstração. Considere em $(\mathbb{R}, d_E)$ a sequência (x_n), digamos que seja crescente, então $x_1 \leq x_2 \leq .. \leq x_n \leq ...$ Sendo a sequência limitada, existe um sup, seja

$$a = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Vamos ver que também

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Sendo a o sup, para cada $\epsilon > 0$ temos $a - \epsilon$ não pode ser cota superior dos x_n, então existe n_0 tal que

$$a - \epsilon < x_{n_0} < a.$$

Assim para todo $n > n_0$ temos

$$a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n < a < a + \epsilon,$$

isso é, para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ temos $x_n \in B_{(a,\epsilon)}$, assim $a = \lim_{n \to \infty} x_n$. □

Proposição 0.13. *Cada sequência real tem uma subsequência monótona.*

Demonstração. Exercício □

Teorema 0.14. $(\mathbb{R}, d_E)$ *é um espaço métrico completo.*

Demonstração.

1. Toda sequência real tem uma subsequência monótona. Então toda sequência de Cauchy real tem uma subsequência de Cauchy monótona.

2. Esta subsequência converge, sendo monótona,
3. e a sequência de Cauchy converge ao mesmo limite, pela Proposição 0.9

□