

Decimaquinta aula: espaços completos e compactos

Segunda feira a gente demonstrou o seguintes resultados:

1. Em (M, d) , seja $X \subset M$, então $x \in X'$ sse existe uma sequência de pontos distintos $(x_n) \in X$ convergendo para $x \in M$;
2. Em (M, d) , o conjunto $F \subset M$ é *fechado* sse para toda sequência (x_n) de F tal que $x_n \rightarrow x$, então $x \in F$;
3. Em (M, d) , o conjunto $A \subset M$ é *aberto* sse para toda sequência (x_n) de M com limite $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in A$

Logo introduzimos sequências de Cauchy:

Definição 0.1. Uma sequência (x_n) de um espaço métrico (M, d) diz-se *sequência de Cauchy* quando para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$ temos

$$d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Propriedades das sequências de Cauchy:

1. Toda sequência convergente é de Cauchy.
2. Toda sequência de Cauchy é limitada.
3. Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (para o mesmo limite).

Definição 0.2. Um espaço métrico (M, d) diz-se *completo* quando toda sequência de Cauchy é convergente.

Proposição 0.3. Seja (M, d_{dis}) um espaço métrico discreto (isso é, M é um conjunto, e para cada $x, y \in M$ temos $d_{dis}(x, y) = 0$ quando $x = y$, e em caso contrário $d_{dis}(x, y) = 1$). Então (M, d_{dis}) é completo.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq n_0$, temos que $d_{dis}(x_n, x_m) < \epsilon$. Em particular, fixado $0 < \epsilon < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq n_0$, temos que $d_{dis}(x_n, x_m) < \epsilon < 1$: assim para cada $n, m \geq n_0$, temos que $d_{dis}(x_n, x_m) = 0$, então $x_n = x_m$. Isso é: Toda sequência de Cauchy num espaço métrico vira constante em um tempo finito, e assim claramente converge por tal valor constante. $\square$

0.0.1 Destaque para $(\mathbb{R}, d_E)$ e $(\mathbb{R}^n, d_E)$

Sequências monótonas

Uma sequência de números reais

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

diz-se *crescente* quando $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$, ou em outras palavras quando para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n < x_{n+1}$. No caso a desigualdade não for stricta: quando para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n \leq x_{n+1}$, a sequência diz-se *não decrescente*. Analogamente, se para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n > x_{n+1}$ a sequência é *decrescente*, e no caso a desigualdade não for stricta diz-se *não crescente*. Em todos esses casos a sequência é *monótona*. A seguinte proposição é muito útil:

Teorema 0.4. (Teorema da convergência monótona) *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

Demonstração. Considere em $(\mathbb{R}, d_E)$ a sequência (x_n) , digamos que seja não decrescente, então $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$. Sendo a sequência limitada, existe um sup, seja

$$a = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Vamos ver que também

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Sendo a o sup, para cada $\epsilon > 0$ o número $a - \epsilon$ não pode ser cota superior dos x_n , assim que existe n_0 tal que

$$a - \epsilon < x_{n_0} \leq a.$$

Assim para todo $n > n_0$ temos

$$a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \epsilon,$$

isso é: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \mid \forall n > n_0$ temos $x_n \in B_{(a, \epsilon)}$, assim $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. □

Proposição 0.5. *Cada sequência real tem uma subsequência monótona.*

Demonstração. Exercício □

Completude de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{R}^n$

Teorema 0.6. $(\mathbb{R}, d_E)$ é um espaço métrico completo.

Demonstração. 1. Toda sequência real tem uma subsequência monótona: uma sequência de Cauchy (x_n) tem uma subsequência (x_{n_k}) monótona.

2. Esta subsequência (x_{n_k}) , sendo monótona, converge, seja x o limite.

3. Então pela propriedade (3) das sequências de Cauchy, (x_n) também converge para x .

□

Vamos utilizar agora este resultado para demonstrar que $\mathbb{R}^n$ também é completo. Notação: vamos considerar sequências em $\mathbb{R}^n$:

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightarrow x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t}).$$

Vamos precisar o seguinte resultado:

Teorema 0.7. *Seja (x_t) uma sequência em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, então:*

1. $x_t \rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$ sse para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t} \rightarrow x_i$,
2. (x_t) é de Cauchy sse para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t}$ é de Cauchy.

Demonstração. 1. Começamos ver que se $x_t \rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$, então para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t} \rightarrow x_i$.

- Sendo que $x_t \rightarrow x$ em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, e sendo a métrica euclidiana equivalente à métrica do máximo, temos que também $x_t \rightarrow x$ em $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.
- Isso quer dizer que, fixado $\epsilon > 0$ existe t_0 tal que para todo $t \geq t_0$, $d_{max} = (x_t, x) = \max_i |x_{i,t} - x_i| < \epsilon$.
- Então, fixado $\epsilon > 0$ existe t_0 tal que para todo $t \geq t_0$ e para todo $i \in [1, n]$ temos $|x_{i,t} - x_i| < \epsilon$, isso é: para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t} \rightarrow x_i$.

Vamos agora ver que, se para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t} \rightarrow x_i$, então $x_t \rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$.

- Fixado $\epsilon > 0$ existe $t_1, \dots, t_n$ tal que para $t \geq T := \max_i t_i$, $|x_{i,t} - x_i| < \epsilon$ para todo $i \in [1, n]$.
- Então para todo $t \geq T$, $d_{max} = (x_t, x) = \max_i |x_{i,t} - x_i| < \epsilon$, e $x_t \rightarrow x$ em $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.
- Assim $x_t \rightarrow x$ em $(\mathbb{R}^n, d_E)$.

2. Seja agora (x_t) uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, vamos ver que para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t}$ é de Cauchy.

- Sendo (x_t) uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, e sendo a métrica euclidiana equivalente à métrica do máximo, (x_t) uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.
- Então fixado $\epsilon > 0$ existe t_0 tal que para todo $t, s \geq t_0$, $d_{max}(x_t, x_s) = \max_i |x_{i,t} - x_{i,s}| < \epsilon$.
- Assim fixado $\epsilon > 0$ existe t_0 tal que para todo $t, s \geq t_0$ e para todo $i \in [1, n]$ temos $|x_{i,t} - x_{i,s}| < \epsilon$, isso é: para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t}$ é de Cauchy.

Vamos agora ver que, se para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t}$ é de Cauchy $(\mathbb{R}, d_E)$, então (x_t) é de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_E)$.

- Fixado $\epsilon > 0$ existe $t_1, \dots, t_n$ tal que para $t \geq T := \max_i t_i$, $|x_{i,t} - x_{i,s}| < \epsilon$ para todo $i \in [1, n]$.
- Então para todo $t \geq T$, $d_{max}(x_t, x_s) = \max_i |x_{i,t} - x_{i,s}| < \epsilon$, e (x_t) é de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.
- Assim (x_t) é de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_E)$.

□

Corolário 0.8. *O espaço $(\mathbb{R}^n, d_E)$ é completo.*

Demonstração. 1. Seja (x_t) sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_E)$: pelo Teorema anterior, para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t}$ é de Cauchy.

2. Então, para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t} \rightarrow x_i$, pois $(\mathbb{R}, d_E)$ é completo.

3. Assim pelo Teorema anterior, $x_t \rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$.

□

Sequências e subsequências

Seja

$$x : \mathbb{N} \rightarrow M$$

$$n \rightarrow x_n$$

uma sequência num espaço métrico (M, d) , seja $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito, e seja

$$x : \mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \rightarrow M$$

$$n_k \rightarrow x_{n_k}$$

uma subsequência. Estritamente falando, a subsequência $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}'}$ não é uma sequência, pois está definida num subconjunto dos naturais. Por outro lado, escrevendo $N' = \{n_1 < n_2 < n_3 \dots\}$, podemos considerar a subsequência $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$ como a aplicação:

$$x_n : \mathbb{N} \rightarrow M$$

$$k \rightarrow x_{n_k}$$

e então como sequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

0.1 Espaços compactos e sequencialmente compactos

Seja (M, d) um espaço métrico (ou (M, τ) topológico). Então M é *sequencialmente compacto*, se toda sequência (x_n) tem uma subsequência convergente.

Exemplo:

- $(\mathbb{R}, d_E)$ não é sequencialmente compacto:

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow n,$$

não tem subsequência convergente.

O próximo resultado é uma versão para sequências do Teorema de Bolzano-Weierstrass, que caracteriza os espaços sequencialmente compactos de $(\mathbb{R}^n, d_E)$ como *subespaços limitados e fechados de $\mathbb{R}^n$* .

Teorema 0.9. (Teorema de Bolzano-Weierstrass)

Toda sequência limitada de $(\mathbb{R}^n, d_E)$ tem uma subsequência convergente.

Demonstração. 1. Seja $X = (x_n)$ uma sequência limitada: então X é um conjunto limitado.

2. Se X contém só um número finito de termos, então pelo menos um desses valores $\hat{x}$ deve se repetir infinitas vezes, então a subsequência constante $x_{n_k} = \hat{x}$ converge para $\hat{x}$.
3. Se X contém um número infinito de termos, então X é um conjunto infinito e limitado: pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, X tem um ponto de acumulação, seja $x \in X'$.
4. Sendo $x \in X'$, então existe uma sequência em X convergendo à x : isso é, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) convergendo para x .

□

Corolário 0.10. *Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, um espaço é sequencialmente compacto se é fechado e limitado.*

Demonstração. • Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado: então toda sequência (x_n) com $x_n \in A$ para todo n é limitada.

- Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) tem uma subsequência x_{n_k} convergendo para $x \in \mathbb{R}^n$.
- Finalmente, se A é fechado então $x \in A$, e assim A é sequencialmente compacto.

□

Vale o viceversa, mas ainda não podemos demonstrar.