

Decimasexta aula: espaços completos e compactos

Lembramos que:

Definição 0.1. Uma sequência (x_n) de um espaço métrico (M, d) diz-se sequência de Cauchy quando para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$ temos

$$d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Propriedades das sequências de Cauchy:

1. Toda sequência convergente é de Cauchy.
2. Toda sequência de Cauchy é limitada.
3. Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (para o mesmo limite).

Definição 0.2. Um espaço métrico (M, d) diz-se completo quando toda sequência de Cauchy é convergente.

Demonstramos que um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de um qualquer espaço métrico é fechado. Utilizando o teorema da convergência monótona (cada sequência monótona e limitada converge), a gente demonstrou que:

Teorema 0.3. $(\mathbb{R}, d_E)$ é um espaço métrico completo.

E utilizando o seguinte resultado a gente demonstrou que $(\mathbb{R}^n, d_E)$ também é completo.

Teorema 0.4. Seja (x_t) uma sequência em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, então:

1. $x_t \rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$ sse para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t} \rightarrow x_i$,
2. (x_t) é de Cauchy sse para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t}$ é de Cauchy.

Demonstração. Faltava demonstrar o segundo ponto. Seja (x_t) uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, vamos ver que para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t}$ é de Cauchy.

- Sendo (x_t) uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, e sendo a métrica euclidiana equivalente à métrica do máximo, (x_t) uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_{\max})$.
- Então fixado $\epsilon > 0$ existe t_0 tal que para todo $t, s \geq t_0$, $d_{\max}(x_t, x_s) = \max_i |x_{i,t} - x_{i,s}| < \epsilon$.

- Assim fixado $\epsilon > 0$ existe t_0 tal que para todo $t, s \geq t_0$ e para todo $i \in [1, n]$ temos $|x_{i,t} - x_{i,s}| < \epsilon$, isso é: para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t}$ é de Cauchy.

Vamos agora ver que, se para todo $i \in [1, n]$, $x_{i,t}$ é de Cauchy $(\mathbb{R}, d_E)$, então (x_t) é de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_E)$.

- Fixado $\epsilon > 0$ existe $t_1, \dots, t_n$ tal que para $t \geq T := \max_i t_i$, $|x_{i,t} - x_{i,s}| < \epsilon$ para todo $i \in [1, n]$.
- Então para todo $t \geq T$, $d_{\max}(x_t, x_s) = \max_i |x_{i,t} - x_{i,s}| < \epsilon$, e (x_t) é de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_{\max})$.
- Assim (x_t) é de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, d_E)$.

□

Espaços e conjuntos discretos

Um espaço métrico diz-se discreto quando tem a métrica discreta. Por outro lado, se (M, d) é um espaço métrico, $S \subseteq M$ diz-se *discreto* quando, dado $x \in S$, existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que para todo $y \in S \setminus \{x\}$ temos $d(x, y) > \delta$.

Execício: Prova que S é discreto sse $S' = \emptyset$.

0.1 Espaços compactos e sequencialmente compactos

0.1.1 Espaços compactos

Lembramos que, sendo K um subconjunto de um espaço métrico (M, d) :

1. Uma **cobertura** de K é uma família $\mathcal{C} = (C_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de M tal que $K \subset \bigcup_{i \in I} C_i$. (Isso é: para cada $k \in K$ existe pelo menos um C_i contendo k).
2. Uma cobertura $(C_i)_{i \in I}$ diz-se **aberta** quando todo C_i é aberto em (M, d) .
3. Uma cobertura $(C_i)_{i \in I}$ diz-se **finita** quando I é um conjunto finito.
4. Se existe $I' \subset I$ tal que $K \subset \bigcup_{i \in I'} C_i$, então $\mathcal{C} = (C_i)_{i \in I'}$ diz-se de **subcobertura**.

Um espaço métrico (M, d) diz-se **compacto** quando toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita.

Um subconjunto $K \subset M$ diz-se **compacto** quando toda cobertura aberta (em M) possui uma subcobertura finita; em outras palavras, quando (K, d)

é um subespaço métrico compacto.

Exemplos

1. Claramente, todo espaço métrico finito é compacto, pois toda cobertura contém só um número finitos de subconjuntos distintos.
2. Um espaço discreto infinito (como por exemplo $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$) não é compacto, pois as bolas abertas centradas nos seus pontos constituem uma cobertura aberta, que claramente não tem subcobertura finita pois os pontos são infinitos.

Teorema 0.5. Heine-Borel. *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é fechado e limitado.*

Exemplos

1. O intervalo aberto $(0, 1)$ não é compacto.
2. O conjunto ternario de Cantor C , obtido recursivamente tirando um intervalo aberto (de comprimento $1/3$ do total) do meio de um segmento:

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right)$$

é compacto, pois é claramente limitado e é fechado, pois o complementar é aberto.

Útil é a seguinte:

Proposição 0.6. *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Exercício. □

0.1.2 Espaços métricos totalmente limitados

Definição 0.7. *Seja (M, d) um espaço métrico, $X \subset M$ limitado, definimos o diâmetro de X como o número real:*

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y), |x, y \in X\}.$$

Seja (M, d) um espaço métrico, M diz-se *totalmente limitado* quando, para todo $\epsilon > 0$, existe uma decomposição

$$M = X_1 \cup \dots \cup X_n$$

de M numa reunião finita de conjuntos de diâmetro menor do que ϵ . Equivalentemente, M é totalmente limitado quando, para todo $\epsilon > 0$, M pode-se cobrir por um número finito de bolas de raio ϵ :

$$M \subseteq B_{(x_1, \epsilon)} \cup \dots \cup B_{(x_n, \epsilon)}.$$

Se M é totalmente limitado e $X \subset M$, X é totalmente limitado. Cubrindo M com finitas bolas de raio ϵ , poderíamos não poder usar as mesmas bolas para X , pois os centros poderiam não pertencer a X . Então cubrimos M com finitas bolas de raio $\epsilon/2$. Considere as bolas B tal que $X \cap B \neq \emptyset$, e escolha $x \in X \cap B$. Finalmente substitui B pela bola $B' = B_{(x, \epsilon)}$. As bolas B' são um número finito de bolas de raio ϵ cobrindo X . Todo espaço totalmente limitado é limitado (mas não vale o viceversa).

Exemplos:

1. Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado, então é totalmente limitado. De fato, para todo $\epsilon > 0$ podemos escrever a reta como reunião dos intervalos

$$I_n = [n\epsilon, (n+1)\epsilon], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sendo X limitado, existe $N > 0$ tal que $X \subset B_{(0, N)}$, e assim X está contido numa reunião finita de I_n (de fato, $n = 2N/\epsilon$).

2. Similmente, se $Y \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então é totalmente limitado (decomponendo $\mathbb{R}^n$ em paralelepípedos $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$).
3. Um espaço compacto é totalmente limitado. De fato, dado X podemos cobrir X com bolas de raio ϵ , e sendo X compacto podemos achar uma cobertura finita.
4. Um espaço totalmente limitado não é necessariamente compacto. Por exemplo em $(\mathbb{R}, d_E)$ o conjunto $(0, 1)$ é totalmente limitado mas não é compacto. Também $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ é totalmente limitado mas não é compacto, pois $\mathbb{Q}$ não é fechado (nem aberto).
5. Um espaço métrico discreto é limitado, mas se infinito não é totalmente limitado.

0.1.3 Espaços sequencialmente compactos

Seja (M, d) um espaço métrico (ou (M, τ) topológico). Então M é *sequencialmente compacto*, se toda sequência (x_n) tem uma subsequência convergente.

Teorema 0.8. (Teorema de Bolzano-Weierstrass)

Toda sequência limitada de $(\mathbb{R}^n, d_E)$ tem uma subsequência convergente.

Demonstração. 1. Seja $X = (x_n)$ uma sequência limitada: então X é um conjunto limitado.

2. Se X contém só um número finito de termos, então pelo menos um desses valores $\hat{x}$ deve se repetir infinitas vezes, então a subsequência constante $x_{n_k} = \hat{x}$ converge para $\hat{x}$.
3. Se X contém um número infinito de termos, então X é um conjunto infinito e limitado: pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, X tem um ponto de acumulação, seja $x \in X'$.
4. Sendo $x \in X'$, define a subsequência de (x_n) da seguinte forma. Seja

$$x_{n_1} \in X \cap B(x, 1),$$

define

$$X_1 := \{x_m \in X \mid m > n_1\},$$

e perceba que, sendo x de acumulação para X e sendo X_1 obtido tirando um número finito de pontos de X , x é um ponto de acumulação para X_1 . Assim podemos definir:

$$x_{n_2} \in X_1 \cap B(x, 1/2),$$

e

$$X_2 := \{x_m \in X \mid m > n_2 > n_1\}.$$

Seguindo assim, achamos uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) convergendo para x .

□

Corolário 0.9. *Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, um espaço é sequencialmente compactos se é fechado e limitado.*

Demonstração. • Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado: então toda sequência (x_n) com $x_n \in A$ para todo n é limitada.

- Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) tem uma subsequência x_{n_k} convergendo para $x \in \mathbb{R}^n$.

- Finalmente, se A é fechado então $x \in A$, e assim A é sequencialmente compacto.

□

Vale o viceversa, como o próximo Teorema mostra.

Teorema 0.10. *Seja (M, d) um espaço métrico. Então são equivalentes:*

1. M é compacto,
2. Todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação,
3. M é sequencialmente compacto,
4. M é completo e totalmente limitado.

Demonstração.

□