Decimaseptima aula: espaços completos e compactos

Lembramos que:

Definição 0.1. *Um espaço métrico (M, d) diz-se completo quando toda sequência de Cauchy é convergente.*

Um espaço métrico (M, d) diz-se **compacto** quando toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita.

Um subconjunto $K \subset M$ diz-se **compacto** quando toda cobertura aberta (em M) possui uma subcobertura finita; em outras palavras, quando (K, d) é um subespaço métrico compacto.

Proposição 0.2. *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Comencemos provando que todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto.

- Seja (M, d) um espaço métrico compacto, e seja $X \subset M$ fechado, e seja $F \subset \bigcup_{i \in I} C_i$ uma cobertura aberta de F .
- Sendo F fechado, $(\bigcup_{i \in I} C_i) \cup (M \setminus F)$ é uma cobertura aberta de M .
- Sendo M compacto, existe uma subcobertura finita:

$$M \subseteq C_1 \cup \dots \cup C_n \cup (M \setminus F).$$

- Então $F \subseteq C_1 \cup \dots \cup C_n$, e assim é compacto.

Vamos ver agora que um subconjunto compacto de um espaço métrico qualquer deve ser fechado.

- Seja (M, d) um espaço métrico, e $K \subset M$ compacto, e assumimos K não fechado.
- Sendo K não fechado, existe $x \in K' \setminus K$.
- Seja $B_n = B_{(x, 1/n)}$, então $\{x\} = \bigcap_n B_n$.
- Assim, $\mathcal{A} = \bigcup_n M \setminus B_n$ é uma cobertura para K , pois:

$$\bigcup_n M \setminus B_n = M \setminus \bigcap_n B_n = M \setminus \{x\} \supseteq K.$$

- A cobertura $\mathcal{A}$ de K não admite subcobertura finita, pois sendo $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \dots$, para todo N temos $\bigcup_{n=1}^N A_n = A_N$. Sendo que, para todo N , $x \notin A_N$, obtemos que para todo N , $K \not\subset A_N$, contradição.

□

Observação: Se percebe pela prova que *todo subconjunto fechado de um espaço topológico é compacto*, pois não utilizamos a métrica por esta demonstração.

Por outro lado, não necessariamente um subconjunto compacto de um espaço topológico é fechado:

Seja X um conjunto com pelo menos 2 pontos, x_1 e x_2 , e seja $\tau = \{\emptyset, X\}$ a topologia caótica/trivial. Então, em (X, τ) , o conjunto $\{x_1\}$ é compacto (como o inteiro espaço e qualquer subconjunto de (X, τ)) mas não é fechado (nem aberto!).

Perceba que este espaço NÃO É HAUSDORFF/ T_2 (onde (X, τ) é um espaço de Hausdorff quando, para todo $x \neq y \in X$, x e y possuem em X vizinhanças disjuntas). De fato, nem é Kolmogorov/ T_0 (onde (X, τ) é um espaço de Kolmogorov quando, para todo $x \neq y \in X$, pelo menos um dos dois pontos possui uma vizinhança não contendo o outro).

De fato: todo espaço métrico é de Hausdorff, e para todo espaço de Hausdorff (X, τ) , $Y \subset X$ compacto é fechado.

0.0.1 Espaços métricos totalmente limitados

Definição 0.3. Seja (M, d) um espaço métrico, $X \subset M$ limitado, definimos o diâmetro de X como o número real:

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y), |x, y \in X\}.$$

Seja (M, d) um espaço métrico, M diz-se *totalmente limitado* quando, para todo $\epsilon > 0$, existe uma decomposição

$$M = X_1 \cup \dots \cup X_n$$

de M numa reunião finita de conjuntos de diâmetro menor do que ϵ .

Equivalentemente, M é totalmente limitado quando, para todo $\epsilon > 0$, M pode-se cobrir por um número finito de bolas de raio ϵ : isso é, existem $x_1, \dots, x_n \in M$ tal que:

$$M \subseteq B_{(x_1, \epsilon)} \cup \dots \cup B_{(x_n, \epsilon)}.$$

- Se M é totalmente limitado e $X \subset M$, X é totalmente limitado. Cubrindo M com finitas bolas de raio ϵ , poderíamos não poder usar as mesmas bolas para X , pois os centros poderiam não pertencer a X . Então cubrimos M com finitas bolas de raio $\epsilon/2$. Considere as bolas B tal que $X \cap B \neq \emptyset$, e escolha $x \in X \cap B$. Finalmente substitui B pela bola $B' = B_{(x,\epsilon)}$. As bolas B' são um número finito de bolas de raio ϵ cubrendo X .
- Todo espaço compacto é totalmente limitado, mas não vale o viceversa (olha $(0, 1)$ em $(\mathbb{R}, d_E)$).

0.0.2 Espaços sequencialmente compactos

Seja (M, d) um espaço métrico (ou (M, τ) topológico). Então M é *sequencialmente compacto*, se toda sequência (x_n) tem uma subsequência convergente.

Corolário 0.4. (Do Teorema de Bolzano-Weierstrass:) Em $(\mathbb{R}^n, d_E)$, um espaço é sequencialmente compactos se é fechado e limitado.

Demonstração. • Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado: então toda sequência (x_n) com $x_n \in A$ para todo n é limitada.

- Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) tem uma subsequência x_{n_k} convergendo para $x \in \mathbb{R}^n$.
- Finalmente, se A é fechado então $x \in A$, e assim A é sequencialmente compacto. □

Teorema 0.5. Seja (M, d) um espaço métrico. Então são equivalentes:

1. M é compacto,
2. Todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação,
3. M é sequencialmente compacto,
4. M é completo e totalmente limitado.

Demonstração. 1. Começamos vendo que, se M é compacto, então todo subconjunto de M possui um ponto de acumulação.

- Seja $X \subset M$, assumimos $X' = \emptyset$ e vamos ver que X é finito.
- Sendo $X' = \emptyset$, temos que X é um conjunto discreto.

- Sendo $X' = \emptyset$ e $\overline{X} = X \cup X'$, obtemos $X = \overline{X}$.
 - Sendo X fechado num espaço métrico compacto, X é compacto.
 - Sendo X compacto e discreto, X é finito.
2. Vemos agora que, se todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação, então M é sequencialmente compacto.
- Seja (x_n) uma sequência de pontos de M , queremos ver que possui uma subsequência (x_{n_k}) convergendo para $x \in M$.
 - Se (x_n) possui um número finito de termos, então pelo menos um ponto x se repete infinitas vezes, e assim $x_{n_k} \equiv x$ é uma subsequência constante e então trivialmente convergente.
 - Se (x_n) possui um número infinito de termos, então o conjunto dos termos X é um conjunto infinito e possui um ponto de acumulação, seja x .
 - Define $x_{n_1} = X \cap B_{(x,1)}$, e $X_1 = \{x_m \mid m > n_1\}$.
 - Define indutivamente $x_{n_{k+1}} = X_k \cap B_{(x, \frac{1}{k})}$, e $X_{k+1} = \{x_m \mid m > n_{k+1}\}$, então (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n) convergente (convergendo para x).

Vemos agora que, se M é sequencialmente compacto, então é completo e totalmente limitado.

- Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Sendo M sequencialmente compacto, (x_n) tem uma subsequência (x_{n_k}) convergendo para $x \in M$.
- Sendo (x_n) de Cauchy com uma subsequência convergente, temos que (x_n) também converge para o mesmo limite, e assim M é completo.
- Vamos ver agora que, para todo $\epsilon > 0$, podemos cobrir M com um número finito de bolas abertas de raio ϵ .
- Fixado ϵ , escolhamos $x_1 \in M$.
- Se $M \subseteq B_{(x_1, \epsilon)}$ temos acabado. Em caso contrário, existe $x_2 \in M$ tal que $d(x_1, x_2) \geq \epsilon$.
- Se $M \subseteq B_{(x_1, \epsilon)} \cup B_{(x_2, \epsilon)}$ temos acabado. Em caso contrário, existe $x_3 \in M$ tal que $d(x_1, x_3) \geq \epsilon$ e $d(x_2, x_3) \geq \epsilon$.
- Prosseguindo assim, temos duas possibilidades:

- (a) chegamos a N tal que $M \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \epsilon)$, e M é totalmente limitado.
- (b) obtemos uma sequência (x_n) tal que, para todo $m \neq n$, $d(x_n, x_m) > \epsilon$. Más esta sequência não pode ter uma subsequência convergente, pois (x_n) não é de Cauchy assim que nenhuma subsequência pode ser de Cauchy, e então nem convergente.

Seja agora M completo e totalmente limitado, vamos ver que é compacto.

- Seja, por absurdo, $\mathcal{A} = \bigcup_n A_n$ uma cobertura aberta que não possui subcobertura finita.
- Sendo M totalmente limitado, podemos cubrir M com uma reunião finita de bolas de raio 1, isso é: existem $x_1, \dots, x_n \in M$:

$$M \subset B_{(x_1,1)} \cup \dots \cup B_{(x_n,1)}$$

- Sendo $M \subset \bigcup_n A_n$ más não possuindo subcobertura finita, pelo menos um $B_i \cap M$ não possui subcobertura finita, seja $B_1 \cap M$, e seja x_1 seu centro.
- Sendo M totalmente limitado, $B_1 \cap M$ também é, assim podemos cubrir-o com uma reunião finita de bolas de raio $1/2$. Percebe que a distância dos centros dessas bolas para x_1 é sempre menor que 1 (pois os centros pertencem à $B_1 \cap M \subset B_1 = B_{(x_1,1)}$).
- Pelo menos um desses conjuntos, seja $B_2 \cap M$, não pertence a uma reunião finita de A_n . Seja x_2 seu centro (assim $d(x_1, x_2) < 1$).
- Prosseguindo assim, obtemos uma sequência de subconjuntos fechados de M :

$$B_1 \cap M \supset B_2 \cap M \supset \dots \supset B_n \cap M \supset \dots,$$

onde $B_i = B_{(x_i, 1/2^i)}$, $x_i \in M$, e nenhum B_i é contido numa reunião finita de A_n .

- Os centros x_i das bolas B_i são tais que, para todo i , $d(x_i, x_{i+1}) < 1/2^{i-1}$, e assim formam uma sequência de Cauchy (x_n) : sendo M completo, x_n converge para $x \in M$.
- Então existe $A_{n_0} \in \mathcal{A}$ contendo x , e sendo A_{n_0} aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_{(x, \delta)} \subset A_{n_0}$.

- Para i grande bastante (de fato tal que $1/2^i + |x - x_j| < \delta$) temos $B_i \subset B_{(x,\delta)} \subset A_{n_0}$, e assim M é contido numa reunião finita de A_n , absurdo.

□