Decimaoitava áula: Sequências de funções

Vamos estudar agora *sequências de funções*. Seja X um conjunto, $Y \subseteq X$, e (M,d) um espaço métrico. A sequências de funções

$$f_n : X \to M$$

$$x \to (f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...)$$

converge *pontualmente* em Y para a função

$$f : X \to M,$$

e escrevemos $f_n \to f$ pontualmente (ou $lim f_n = f$ pontualmente) quando, para cada $x \in Y$, a sequência $(f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...)$ converge para $f(x)$ em (M,d).

Isso é, para cada $x \in Y$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n(x, \epsilon)$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $f_n(x) \in B_{(f(x),\epsilon)}$, ou in outras palavras

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Exemplos:

1. Considere a sequência de funções

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to (x/n)_{n \in \mathbb{N}} = (x, x/2, ..., x/n, ...),$$

esta sequência converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para a função nula

$$f(x) \equiv 0.$$

De fato, fixado $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, seja $n_0 = |x|/\epsilon + 1$, então para todo $n \geq n_0$ temos

$$d_E(f_n(x), f(x)) = d_E(x/n, 0) = |x/n| = |x|/n \leq |x|/n_0 = \frac{|x|\epsilon}{|x| + \epsilon} < \epsilon.$$

Perceba que n_0 depende de x e de ϵ: não podemos achar n_0 que valga para todo $x \in \mathbb{R}$, mesmo fixando $\epsilon > 0$. Por exemplo, seja $\epsilon = 1$ e $n_0 > 0$ qualquer: temos que em $x = n_0 + 1$ a sequência não converge, pois: podemos achar $n > n_0$ e $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x/n| > 1$ (ex: $x = n+10$), assim que

$$d_E(f_n(x), f(x)) = d_E(x/n, 0) = |x/n| = |x|/n > 1.$$

2. Considere a sequência de funções

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \to (x^n)_{n\in\mathbb{N}} = (x, x^2, ..., x^n, ...).$$

Esta sequência converge pontualmente em $[0,1]$ para a função:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{on } [0,1) \\ 1 & \text{on } 1 \end{cases}$$

pois claramente para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^n \equiv 1$, e para todo $x \in [0,1)$ temos que a sequência $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0. De fato, seja $x \in [0,1)$, então existe $a > 0$ tal que

$$x = \frac{1}{1+a}.$$

Sendo que $(a+1)^{\geq} 1 + na$, obtemos

$$x^n = (\frac{1}{1+a})^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$$

assim que, dado $\epsilon > 0$, podemos achar $n_0 = \frac{1}{\epsilon a}$ e assim para todo $n \geq n_0$ temos

$$d_E(f_n(x), f(x)) = d_E(x^n, 0) = |x^n| < \frac{1}{na} \leq \epsilon.$$

Por outro lado, dizemos que a sequência de funções $f_n : X \to M$ converge *uniformemente* em $Y \subseteq X$ para $f : X \to M$, e escrevemos $f_n \to f$ uniformemente (ou $lim f_n = f$ uniformemente) quando, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n(\epsilon)$ tal que *para todo* $x \in Y$ temos

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Claramente, se $f_n \to f$ uniformemente então $f_n \to f$ pontualmente.

Exemplos:

1. A sequência de funções

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to (x/n)_{n\in\mathbb{N}} = (x, x/2, ..., x/n, ...),$$

converge uniformemente para a função nula em todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. De fato, seja $Y \subset \mathbb{R}$ limitado, então existe $R \in \mathbb{R}$ tal que $Y \subseteq B_E(0,R)$, isso é, para todo $x \in Y$ temos $|x| < R$. Então, dado $\epsilon > 0$ seja $n_0 = R/\epsilon$, obtemos que para todo $x \in Y$:

$$d_E(f_n(x), f(x)) = d_E(x/n, 0) = |x/n| = |x|/n \leq |x|/n_0 = \frac{|x|\epsilon}{R} < \epsilon.$$

2. Seja $0 < \delta < 1$, então a sequência de funções

$$f_n : [0, 1-\delta] \to \mathbb{R}$$

$$x \to (x^n)_{n\in\mathbb{N}} = (x, x^2, ..., x^n, ...)$$

converge uniformemente para a função nula. De fato, sendo que $1-\delta \in (0,1)$, pelo exemplo 2 acima temos que $(1-\delta)^n$ converge para zero. Assim dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $|1-\delta|^n < \epsilon$, e assim para todo $x \in [0, 1-\delta]$ temos

$$d_E(f_n(x), f(x)) = |x^n| \leq |1-\delta|^n < \epsilon.$$

0.0.1 O espaço normado de funções limitadas coa norma do sup

A convergência uniforme pode-se interpretada como convergência pontual num espaço métrico conveniente: o *espaço normado de funções limitadas coa norma do sup*. Seja X um conjunto, uma função

$$f : X \to \mathbb{R}^n$$

$$x \to (f_1(x), ..., f_n(x))$$

é *limitada* quando existe $K > 0$ tal que, para todo $x \in X$ temos

$$\|f(x)\| = \sqrt{f_1(x)^2 + ... + f_n(x)^2} < K.$$

O conjunto das funções limitadas de X até $\mathbb{R}^n$ é indicado por $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$.

Sejam f, $g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$, definimos a *soma* de f e g como:

$$f + g : X \to \mathbb{R}^n$$

$$x \to f(x) + g(x).$$

Também definimos a *multiplicação escalar* de f com $c \in \mathbb{R}$ como:

$$cf : X \to \mathbb{R}^n$$

$$x \to cf(x) = (cf_1(x), ..., cf_n(x)).$$

Finalmente, a função zero em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ é a função

$$0 : X \to \mathbb{R}^n$$

$$x \to 0.$$

Proposição 0.1. *O conjunto $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ das funções limitadas de X até $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial coa soma e a multiplicação escalar (definidas acima).*

Demonstração. Exercício.

$\square$

Perceba que, se $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$, então:

$$\|f\|_X = sup_{x\in X}\|f(x)\| = sup_{x\in X}\sqrt{f_1(x)^2 + ... + f_n(x)^2}$$

é um numero real.

Definimos em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ a *norma uniforme* ou *norma do sup* como:

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

$$f \to \|f\|_X$$

Proposição 0.2. *A norma uniforme $f \to \|f\|_X$ é uma norma em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$.*