

Decimanona aula: O espaço normado de funções limitadas coa norma do sup

Quarta feira a gente viu convergencia pontual e uniforme de sequências de funções. Lembramos que, se X é um conjunto, $Y \subseteq X$, e (M, d) é um espaço métrico, a sequências de funções

$$f_n : X \rightarrow M$$

$$x \rightarrow (f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$$

converge em Y para a função

$$f : X \rightarrow M$$

pontualmente quando, para cada $x \in Y$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n(x, \epsilon)$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon;$$

em quanto converge *uniformemente* quando, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n(\epsilon)$ tal que *para todo* $x \in Y$ temos

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

0.0.1 O espaço normado de funções limitadas coa norma do sup

Seja X um conjunto, uma função

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \rightarrow (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

é *limitada* quando existe $K > 0$ tal que, para todo $x \in X$ temos

$$\|f(x)\| = \sqrt{f_1(x)^2 + \dots + f_n(x)^2} < K.$$

O conjunto das funções limitadas de X até $\mathbb{R}^n$ é indicado por $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$.

Proposição 0.1. *O conjunto $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ das funções limitadas de X até $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial coa soma e a multiplicação escalar (definidas acima).*

Definimos em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ a *norma uniforme* ou *norma do sup* como:

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow \|f\|_X$$

Proposição 0.2. *A norma uniforme $f \rightarrow \|f\|_X$ é uma norma em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. 1. Por definição, temos $\|f\|_X = \sup_{x \in X} \sqrt{f_1(x)^2 + \dots + f_n(x)^2} \geq 0$ pois a norma euclídea é definida positiva.

2. Claramente $\|0\|_X = 0$. Por outro lado, para todo $x \in X$ temos por definição $0 \leq \|f(x)\| \leq \|f\|_X = 0$, assim que para todo $x \in X$ temos $\|f(x)\| = 0$, e então para todo $x \in X$ temos $f(x) = 0$, e $f \equiv 0$.

3. $\|cf\|_X = \sup_{x \in X} \sqrt{(cf_1(x))^2 + \dots + (cf_n(x))^2} = |c| \sup_{x \in X} \sqrt{f_1(x)^2 + \dots + f_n(x)^2} = |c| \|f\|_X$.

4. Perceba que, para todo $x \in X$, temos:

$$\|(f + g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_X + \|g\|_X,$$

assim que $\|f\|_X + \|g\|_X$ é cota superior pelo conjunto $\{\|(f + g)(x)\| : x \in X\}$. Daí obtemos

$$\|f + g\|_X = \sup\{\|(f + g)(x)\| : x \in X\} \leq \|f\|_X + \|g\|_X.$$

□

Proposição 0.3. *Uma sequência (f_n) em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ converge uniformemente em X para $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ sse*

$$\|f_n - f\|_X \rightarrow 0,$$

isso é, sse para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_X < \epsilon.$$

Demonstração. • Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ convergendo uniformemente em X para $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$. Isso é, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n(\epsilon)$ tal que para todo $x \in X$ temos

$$d_E(f_n(x), f(x)) = \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon,$$

which implies that

$$\|f_n - f\|_X = \sup\{\|(f_n - f)(x)\| : x \in X\} < \epsilon.$$

- Seja (f_n) e f em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$, tal que

$$\|f_n - f\|_X \rightarrow 0,$$

então para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_X < \epsilon,$$

e assim para todo $x \in X$ temos

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|(f_n - f)(x)\| \leq \sup\{\|(f_n - f)(x)\| : x \in X\} = \|f_n - f\|_X < \epsilon.$$

□

Exemplos:

1. Considere a sequência de funções em $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow (x/n)_{n \in \mathbb{N}} = (x, x/2, \dots, x/n, \dots),$$

temos que, se $f \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{[0,1]} &= \sup\{\|(f_n - f)(x)\| : x \in [0, 1]\} = \\ &= \sup\{|\frac{x}{n} - 0| : x \in [0, 1]\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

0.0.2 O espaço métrico $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$

A norma uniforme em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ induz em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ a *distância uniforme*:

$$d_X(f, g) = \|f - g\|_X,$$

que vira $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ um espaço métrico $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$.

Sequências de Cauchy em $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$

Uma sequência (f_n) de funções limitadas

$$f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \rightarrow (f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$$

diz-se *uniformemente de Cauchy* em X quando, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n_0$, temos

$$\|f_n - f_m\|_X < \epsilon.$$

Em outras palavras, uma sequência (f_n) de funções em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ diz-se *uniformemente de Cauchy* em X quando **é de Cauchy em**

$$(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X).$$

Toda sequência de funções em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ convergente em X digamos para a função f é de Cauchy, pois fixado $\epsilon/2$ existe n_0 tal que, se $n, m > n_0$ temos $\|f_n - f\|_X < \epsilon/2$ e $\|f_m - f\|_X < \epsilon/2$, e daí

$$\|f_n - f_m\|_X \leq \|f_n - f\|_X + \|f_m - f\|_X < \epsilon.$$

Também vale o viceversa:

Proposição 0.4. *Uma sequência de funções (f_n) em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^k)$ que seja uniformemente de Cauchy em X é uniformemente convergente em X .*

Demonstração. • Seja (f_n) uma sequência de funções uniformemente de Cauchy em X , então fixado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para todo $n, m > n_0$, temos

$$\|f_n - f_m\|_X = \sup\{\|(f_n - f_m)(x)\| : x \in X\} < \epsilon.$$

- Assim para todo $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^k$, pois para todo $n, m > n_0$ temos

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| = \|(f_n - f_m)(x)\| \leq \sup\{\|(f_n - f_m)(x)\| : x \in X\} = \|f_n - f_m\|_X < \epsilon.$$

- Então, para todo $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_n$ converge, pois $\mathbb{R}^k$ é completo, (isso é por completude existe $a \in \mathbb{R}^k$ tal que $\lim_n f_n(x) = a$).
- Sendo que para todo $x \in X$ a sequência $(f_n(x))_n$ converge (em $\mathbb{R}^k$), define para $x \in X$ a função

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$x \rightarrow f(x) = \lim_n f_n(x)$$

(isso é, por completude existe $a \in \mathbb{R}^k$ tal que $\lim_n f_n(x) = a$, definimos $f(x) := a$)

- Vamos ver que a sequência de funções (f_n) converge uniformemente em X para f :

1. De fato, fixado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para todo $n, m > n_0$ temos

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \sup\{\|(f_n - f_m)(x)\| : x \in X\} = \|f_n - f_m\|_X < \epsilon$$

2. Deixando x e m fixos, e deixando n tender para infinito, obtemos, sendo $f(x) = \lim_n f_n(x)$:

$$\|f(x) - f_m(x)\| \leq \|f - f_m\|_X < \epsilon.$$

3. Assim, fixado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para todo $m > n_0$ e todo $x \in X$ temos

$$\|f - f_m\|_X < \epsilon$$

e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X .

□

Daí:

Corolário 0.5. *O espaço métrico $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$ é completo.*

Demonstração. 1. Reformulando o resultado anterior, temos que toda sequência de Cauchy em $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$ converge para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se o limite $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ pertence a $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$, então toda sequência de Cauchy em $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$ converge em $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$, e assim $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$ é completo. Vamos ver que o limite $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é em $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$.

2. Seja $\epsilon > 0$ fixado, assim que existe n_0 tal que para $n > n_0$

$$\|f - f_n\|_X < \epsilon,$$

3. então para todo $x \in X$ e $m > n_0$ fixo temos:

$$\begin{aligned} \|f(x)\| - \|f_m(x)\| &\leq \|f(x)\| - \|f_m(x)\| \leq \|f(x) - f_m(x)\| \leq \\ &\leq \|f - f_m\|_X < \epsilon. \end{aligned}$$

4. Assim para todo $x \in X$ temos:

$$\|f(x)\| < \epsilon + \|f_m(x)\|$$

e sendo f_m limitada, concluímos.

□