

Aula vinte: continuidade

0.0.1 Resúmen: sequências de funções

Na semana passada a gente estudou convergência de sequências de funções num espaço métrico.

1. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow M$ pode convergir para uma função $f : X \rightarrow M$ de duas formas:
 - pontualmente: para todo $x \in X$ e $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(x, \epsilon)$ tal que para todo $n > n_0$ temos $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$;
 - uniformemente: para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para todo $n > n_0$ e $x \in X$ temos $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$;
2. Logo estudamos convergência uniforme de funções limitadas $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^n$.
3. Definimos no espaço das funções limitadas $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ de um conjunto X em $\mathbb{R}^n$ a norma do sup:

$$\|f\|_X := \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$$

4. Dessa forma tornamos $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ num espaço métrico $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$, onde

$$d_X(f, g) = \|f - g\|_X.$$

5. Vimos que uma sequência de funções limitadas (f_n) converge uniformemente para uma função f se e só se

$$\|f_n - f\|_X \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

6. Finalmente, definimos sequências de Cauchy em $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$, e provamos que toda sequência de Cauchy em $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$ converge, seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ o limite.
7. Para provar que $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$ é completo, só falta demonstrar que $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$.

Teorema 0.1. *O espaço métrico $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$ é completo.*

Demonstração. 1. Temos que toda sequência de Cauchy em $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$ converge para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vamos ver que o limite $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é em $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n), d_X)$.

2. Seja $\epsilon > 0$ fixado, assim que existe n_0 tal que para $n > n_0$

$$\|f - f_n\|_X < \epsilon,$$

3. então para todo $x \in X$ e $m > n_0$ fixo temos:

$$\begin{aligned} \|f(x)\| - \|f_m(x)\| &\leq \| \|f(x)\| - \|f_m(x)\| \| \leq \|f(x) - f_m(x)\| \leq \\ &\leq \|f - f_m\|_X < \epsilon. \end{aligned}$$

4. Assim para todo $x \in X$ temos:

$$\|f(x)\| < \epsilon + \|f_m(x)\|$$

e sendo f_m limitada, concluímos.

□

0.0.2 Resúmen: noção topológica de continuidade

Definição 0.2. *Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos, a função*

$$f : X \rightarrow Y$$

é contínua em $a \in X$ quando, para cada vizinhança V de $f(a)$ em (Y, τ_2) , existe uma vizinhança U de a em (X, τ_1) tal que $f(U) \subseteq V$. Se $A \subseteq X$, então f é contínua em A se é contínua em cada ponto de A .

Seja $f^{-1}(V)$ a **imagem inversa** de V :

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

então $f(U) \subseteq V$ é equivalente à $U \subseteq f^{-1}(V)$. Também percebam que, se $U \subseteq f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a , então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a . Assim podemos re-formular a definição como:

A função $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** em a quando para cada vizinhança V de $f(a)$ em (Y, τ_2) , $f^{-1}(V)$ é vizinhança de a em (X, τ_1) . Outra vez, se $A \subseteq X$, então f é contínua em A se é contínua em cada ponto de A .

Percebam que, nessa definição, olhamos a continuidade em **pontos** do domínio, isso é, **localmente**.

Por outro lado, o próximo Teorema não considera continuidade num ponto, mas no **domínio de f entero**. Por isso o Bartle bautizou a seguinte resultado **Teorema da continuidade global**:

Teorema 0.3. *Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função. São equivalentes:*

1. *f é contínua (em (X, τ_1)),*
2. *para cada V aberto em (Y, τ_2) , $f^{-1}(V)$ é aberto em (X, τ_1) ,*
3. *para cada K fechado em (Y, τ_2) , $f^{-1}(K)$ é fechado em (X, τ_1) .*

Funções contínuas preservam compacidade e conexidade:

Teorema 0.4. *Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológico, $f : X \rightarrow Y$ contínua, e $K \subset X$. Então:*

1. *Se K é conexo, $f(K)$ é conexo;*
2. *Se K é compacto, $f(K)$ é compacto.*

0.0.3 Continuidade em espaços métricos

Continuidade é uma noção topológica, isso é, como vimos a definição é puramente topológica. Em espaços métricos, porém, a noção de continuidade é equivalente à clássica noção com ϵ e δ que a gente aprendeu na escola. Também tem uma noção de continuidade que utiliza sucessões.

Teorema 0.5. *Sejam (M, d) , e (N, d') espaços métricos, e $f : M \rightarrow N$ uma função. Então são equivalentes:*

1. *f é contínua em $a \in M$;*
2. *para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que*

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon;$$

3. *se (x_n) é uma sequência em M convergendo para a , então a sequência $(f(x_n))$ em N converge para $f(a)$.*

Demonstração. • $(1 \Rightarrow 2)$ Se f é contínua em a , então para cada vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que $f(U) \subseteq V$. Uma vizinhança de $f(a)$ é um conjunto contendo um aberto, então podemos considerar estas vizinhança como bolas abertas centradas em pontos. Assim, sendo f contínua em a , fixado $\epsilon > 0$ seja $V = B(f(a), \epsilon)$, então existe $\delta > 0$ tal que, sendo $U = B(a, \delta)$ temos $f(U) \subseteq V$, assim que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon$.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Seja (x_n) uma sequência em M convergendo para a , assim que fixado $\delta > 0$ existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ temos $x_n \in B(a, \delta)$. Então para todo $n > n_0$, temos que $d'(f(x), f(a)) < \epsilon$ e $f(x_n) \in B(f(a), \epsilon)$, e $f(x_n)$ converge para $f(a)$.
- $(3 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow \neg 1 \Rightarrow \neg 3)$ Se f não é contínua em a , então existe uma vizinhança V de $f(a)$ tal que para toda vizinhança U de a , $f(U) \not\subset V$, assim que para toda vizinhança U de a existe x_U tal que $f(x_U) \notin B(f(a), \epsilon)$. Define para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $U_n = \{x \in M \mid d(x, a) < 1/n\}$, então para todo n , U_n é vizinhança de a , e assim para todo n existe $\hat{x}_n \in U_n$ com $f(\hat{x}_n) \notin B(f(a), \epsilon)$. A sequência $(\hat{x}_n)$ converge para a , em quanto nenhum elemento da sequência $f(\hat{x}_n)$ pertence à $B(f(a), \epsilon)$, assim que não converge para $f(a)$.

□

Desse teorema tiramos (trivialmente) um critério para discontinuidade:

Crítério para discontinuidade: $f : M \rightarrow N$ não é contínua em $a \in M$ sse existe uma sequência (x_n) em M convergendo para a em quanto $(f(x_n))$ em N não converge para $f(a)$.

Exemplos:

- Seja (M, d) qualquer, então a função identidade $f : M \rightarrow M$ é contínua, prendendo $\delta = \epsilon$.
- Demonstre a continuidade da função

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^2$$

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, queremos ver que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in B(a, \delta)$, então $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$, assim que queremos acotar $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$. Se $a = 0$, escolhemos $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Se $a \neq 0$, então $|a| > 0$, e percebe que:

$$|x - a| < |a| \Rightarrow |x| < 2|a|, |x + a| \leq |x| + |a| < 3|a|,$$

assim que, se $|x - a| < |a|$, obtemos

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| < |a|3|a| = 3|a|^2.$$

Então, fixado $\epsilon > 0$, podemos achar $\delta = \min\{|a|, \epsilon/(3|a|^2)\}$.

Proposição 0.6. *A aplicação de duas funções contínuas é contínua. Más precisamente, se $f : M \rightarrow N$ é contínua em $a \in M$, e $g : N \rightarrow P$ é contínua em $f(a) \in N$, então $g \circ f$ é contínua em a .*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Sendo g contínua em $f(a)$, existe $\lambda > 0$ tal que, para todo $y \in N$,

$$d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \epsilon.$$

Sendo f contínua em a , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in M$,

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon.$$

□