Aula veinte: continuidade

Na áula passada a gente viu:

Teorema 0.1. *Sejam (M, d), e (N, d') espaços métricos, e $f : M \to N$ uma função. Então são equivalentes:*

1. *f é continua em $a \in M$;*
2. *para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que*
$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon;$$
3. *se (x_n) é uma sequência em M convergendo para a, então a sequência $(f(x_n))$ em N converge para $f(a)$.*

Desse teorema tiramos (trivialmente) um crítero para discontinuidade:
Críterio para discontinuidade: $f : M \to N$ não é continua em $a \in M$ sse existe uma sequência (x_n) em M convergendo para a em quanto $(f(x_n))$ em N não converge para $f(a)$.

Perceba que a noção de continuidade num ponto é local (depende do comportamento da função perto do ponto). Assim, seja $f : M \to N$ uma função, e $a \in M$; se existir $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset M$ e $f_{|B}$ for contínua em a, então $f : M \to N$ é continua em a. Assim, se para todo conjunto limitado $X \subset M$ temos $f_{|X}$ continua, então $f : M \to N$ é continua.

0.0.1 Intermezzo: produtos cartesianos de espaços métricos

Se (M, d) e (N, d') são espaços métricos, o **produto cartesiano** $M \times N$ é o conjunto formado das duplas $p = (m, n)$, com $m \in M$ e $n \in N$. Tem vários tipos de métricas que podemos definir no produto Cartesiano $M \times N$:

$$\text{a métrica da soma } d_{M\times N}(p, p') = d(m, m') + d(n, n'),$$

$$\text{a métrica do max } d_{M\times N}(p, p') = max\{d(m, m'), d(n, n')\},$$
$$\text{a métrica } d_{M\times N}(p, p') = \sqrt{d(m, m')^2 + d(n, n')^2}.$$

Estas métricas são topologicamente equivalentes.

0.0.2 Exemplo de funções continuas

Exemplos de funções contínuas:

- Seja (M, d) qualquer, então a função identidade $f : M \to M$ é contínua, prendendo $\delta = \epsilon$.
- Demonstre a continuidade da função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to x^2$$

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, queremos ver que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in B(a, \delta)$, então $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$, assim que queremos acotar $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$. Se $a = 0$, escolhemos $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Se $a \neq 0$, então $|a| > 0$, e perceba que:

$$|x - a| < |a| \Rightarrow |x| < 2|a|,\ |x + a| \leq |x| + |a| < 3|a|,$$

assim que, se $|x - a| < |a|$, obtemos

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| < |a|3|a| = 3|a|^2.$$

Então, fixado $\epsilon > 0$, podemos achar $\delta = min\{|a|, \epsilon/(3|a|^2)\}$.

- Seja V um espaço vetorial normado, a multiplicação:

$$m : \mathbb{R} \times V \to V$$

$$(c, x) \to c \cdot x$$

é contínua em cada subconjunto limitado de $\mathbb{R} \times V$ (na métrica do max: se $(x, c) \in \mathbb{R} \times V$, então $d((c, x), (0, 0)) = max\{d_E(c, 0), d_V(x, 0)\} = max\{|c|, \|x\|_V\}$), assim que é continua em $\mathbb{R} \times V$. De fato, seja $\epsilon > 0$, e $|c|$, $|a|$, $\|x\|$, $\|y\| < K$, então para $\delta = \epsilon/(2K)$ temos: se $|c - a| < \epsilon/(2K)$ e $\|x - y\| < \epsilon/(2K)$, então

$$d(m(c, x), m(a, y)) = \|c \cdot x - a \cdot y\| = \|c \cdot x - c \cdot y + c \cdot y - a \cdot y\| \leq$$

$$\leq \|c \cdot x - c \cdot y\| + \|c \cdot y - a \cdot y\| =$$

$$= |c|\|x - y\| + |c - a|\|y\| < K(\|x - y\| + |c - a|) < K(2\epsilon/(2K)) = \epsilon.$$

- **Funções de Lipschitz.** Uma função $f : M \to N$ pela qual existe $c > 0$ tal que, para todo x, $y \in M$

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$$

chama-se função **Lipschitz** (e c é a **constante de Lipschitz**). Funções Lipschitz são contínuas: fixado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon/c$, então

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) < \epsilon.$$

Se f, $g : M \to \mathbb{R}$ são Lipschitz com constante de Lipschitz c, c', então temos que, para todo x, $y \in M$:

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| = |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < cd(x, y) + c'd(x, y) = (c + c')d(x, y).$$

Similmente, sendo $a \in \mathbb{R}$, a função $a \cdot f$ é de Lipschitz. Então, combinações lineares de funções de Lipschitz são de Lipschitz, e então contínuas.

- **Contrações fracas.** Uma função $f : M \to N$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

chama-se de **contração fraca**. Uma contração fraca é uma função de Lipschitz com constante de Lipschitz $c = 1$, e então é continua.

- Seja V um espaço vetorial normado, então a norma

$$\|\| : V \to \mathbb{R}$$

é uma contração fraca, pois (lembra que podemos interpretar $\|x\| = d(x, 0)$)

$$d_E(V(x), V(y)) = |V(x) - V(y)| = |\|x\| - \|y\|| = |d(x, 0) - d(y, 0)| \leq d(x, y)$$

e assim é continua.

- Seja V um espaço vetorial normado com norma $\|\|_V$ e a métrica induzida d_V, e define no produto cartesiano $V \times V$ a norma:

$$\|\|_{V \times V} : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \|x + y\|_{V \times V} = \|x\|_V + \|y\|_V$$

Então no espaço normado $E \times E$ coa norma $\|\|_{V\times V}$ e a métrica induzida $d_{V\times V}$, a soma

$$s : V \times V \to V$$
$$(x, y) \to x + y$$

é uma contração fraca, pois:

$$d_V(s(x,y), s(a,b)) = \|(x+y) - (a+b)\|_V \leq \|(x-a)\|_V + \|(y-b)\|_V =$$
$$= \|(x-a), (y-b)\|_{V\times V} = \|(x,y) - (a,b)\|_{V\times V} = d_{V\times V}((x,y),(a,b)).$$

e assim é contínua.
Em particular, a soma é contínua em $\mathbb{R}^n$.

- **Continuidade em espaços discretos.** Seja $a \in M$ isolado, isso é, o ponto a é uma bola aberta em (M, d), isso é, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) = \{a\}$. Então toda função

  $$f : M \to N$$

  é continua em a: basta tomar, fixado $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ bastante pequeno tal que $B(a, \delta) = \{a\}$, e assim:

  $$d(x, a) < \delta \Rightarrow x = a \Rightarrow d(f(x), f(a)) = 0 < \epsilon.$$

  Assim, se M é discreto toda a função $f : M \to N$ é continua.

Proposição 0.2. *A aplicação de duas funções contínuas é contínua. Más precisamente, se $f : M \to N$ é continua em $a \in M$, e $g : N \to P$ é continua em $f(a) \in N$, então g é continua em a.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Sendo g continua em $f(a)$, esxiste $\lambda > 0$ tal que, para todo $y \in N$,

$$d(y, f(a)) < \lambda \;\Rightarrow\; d(g(y), g(f(a))) < \epsilon.$$

Sendo f continua em a, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in M$,

$$d(x, a) < \epsilon \;\Rightarrow\; d(f(x), f(a)) < \lambda \;\Rightarrow\; d(g(y), g(f(a))) < \epsilon.$$

□

Corolário 0.3. *Toda restrição de função contínua é contínua.*

Demonstração. Seja $f : M \to N$ contínua em $a \in X \subset M$. Sendo que a inclusão

$$i : X \to M$$
$$x \to x$$

é contínua, a restrição $f_{|X} = f \circ i : X \to M$ é contínua. □

0.0.3 Continuidade conjunta e separada

Podemos considerar uma função

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2, .., x_n) \longrightarrow y = f(x_1, .., x_n)$$

como função de n variáveis, sendo que, para cada i, x_i varia em $\mathbb{R}$. Nesse caso, f é contínua no ponto $\hat{x} = (\hat{x}_1, .., \hat{x}_n)$ se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$d(x, \hat{x}) = \sqrt{(x_1 - \hat{x}_1)^2 + .. + (x_n - \hat{x}_n)^2} < \delta \Rightarrow d(f(x), f(\hat{x}) = |y - \hat{y}| < \epsilon.$$

Por outro lado, f é contínua no ponto $\hat{x} = (\hat{x}_1, .., \hat{x}_n)$ **relativamente à primera variável** quando a função

$$f^{(\cdot, \hat{x}_2, .., \hat{x}_n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = f(x, \hat{x}_1, .., \hat{x}_n)$$

é continua no ponto $x = \hat{x}_1$, e analogamente se define continuidade respeito as outras variáveis.

Se f for contínua relativamente à toda variável, f se chama de **continua separadamente** em relação a cada uma das suas variáveis. Se f for contínua, então é contínua separadamente em relação a cada uma das suas variáveis, pois as **imersões isométricas**

$$j^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$x \to (\hat{x}_1, .., \hat{x}_{i-1}, x, \hat{x}_{i+1}, .., \hat{x}_n)$$

são contínuas, e assim a composição $f^{(\cdot, \hat{x}_2, .., \hat{x}_n)} \circ j^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.

A recíproca é falsa. **Exemplo:**

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é separadamente contínua em zero, pois as funções

$$f(x, 0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad f(0, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{x0}{x^2+0^2} \equiv 0 \qquad\qquad y \longrightarrow \frac{0y}{0^2+y^2} \equiv 0$$

são constantemente iguais a zero, e assim contínuas.

Por outro lado, seja $a \neq 0$, então f restringida à reta $y = ax$ vira:

$$f(x, ax) = \begin{cases} \frac{ax^2}{x^2+a^2x^2} \equiv \frac{a}{1+a^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{em } (0,0) \end{cases}$$

0.0.4 Homeomorfismos

Um Homeomorfismo é uma função continua

$$f : M \to N$$

tal que a inversa

$$f^{-1} : N \to M$$

também é contínua.

Exemplos:

- **Homeomorfismos entre bolas.** Seja V um espaço vetorial normado, $x \in V$ e $0 \neq c \in \mathbb{R}$, temos que as funções:

  1. translação $t_x : V \to V$, $v \to v + x$,
  2. homotetia $m_c : V \to V$, $v \to c \cdot x$,
  3. suas inversas $(t_x)^{-1} = t_{-x} : V \to V$, $v \to v - x$,
  4. $(m_c)^{-1} = m_{1/c} : V \to V$, $v \to x/c$

  são contínuas, assim que translações a homotetias são **homeomorfismos**. Então, duas bolas abertas qualquer $B(x, c)$ e $B(y, d)$ são homeomorfas. De fato, o homeomorfismo é a função:

  $$\phi = t_y \circ m_{d/c} \circ t_{-x} : E \to E$$

  pois:

  1. $t_{-x}(B(x, c)) = B(0, c)$,
  2. $m_{d/c}(B(0, c)) = B(0, d)$,
  3. $t_y(B(0, d)) = B(y, d)$.

  Da mesma forma, duas bolas fechadas qualquer são homeomorfas.