

Aula vinte e dois: Funções de Lipschitz, continuidade uniforme, e contrações

Proposição 0.1. *A composição de duas funções contínuas é contínua.*

Corolário 0.2. *Toda restrição de função contínua é contínua.*

0.0.1 Continuidade conjunta e separada

Podemos considerar uma função

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow y = f(x_1, \dots, x_n)$$

como função de n variáveis, sendo que, para cada i , x_i varia em $\mathbb{R}$. Nesse caso, f é contínua no ponto $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$d(x, \hat{x}) = \sqrt{(x_1 - \hat{x}_1)^2 + \dots + (x_n - \hat{x}_n)^2} < \delta \Rightarrow d(f(x), f(\hat{x})) = |y - \hat{y}| < \epsilon.$$

Por outro lado, f é contínua no ponto $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ **relativamente à primeira variável** quando a função

$$f(\cdot, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$$

é contínua no ponto $x = \hat{x}_1$, e analogamente se define continuidade respeito as outras variáveis.

Se f for contínua relativamente à toda variável, f se chama de **contínua separadamente** em relação a cada uma das suas variáveis. Se f for contínua, então é contínua separadamente em relação a cada uma das suas variáveis, mas a recíproca é falsa. **Controexemplo:**

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é separadamente contínua em zero, mas não é contínua em zero.

0.0.2 Exemplo de funções contínuas

Exemplos de funções contínuas:

- Seja (M, d) qualquer, então a função identidade $f : M \rightarrow M$ é contínua, prendendo $\delta = \epsilon$.
- Se (M, d) é um espaço métrico discreto, toda a função $f : M \rightarrow N$ é contínua.

- A função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x^2 \end{aligned}$$

é contínua. Em geral, polinômios são contínuos.

- Seja V um espaço vetorial normado, a multiplicação:

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ (c, x) &\rightarrow c \cdot x \end{aligned}$$

é contínua em cada subconjunto limitado de $\mathbb{R} \times V$ (na métrica do max: se $(x, c) \in \mathbb{R} \times V$, então $d((c, x), (0, 0)) = \max\{d_E(c, 0), d_V(x, 0)\} = \max\{|c|, \|x\|_V\}$)

- **Funções de Lipschitz.**
- **Contrações fracas.** Uma função $f : M \rightarrow N$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

chama-se de **contração fraca**. Uma contração fraca é uma função de Lipschitz com constante de Lipschitz $c = 1$, e então é contínua.

- Seja V um espaço vetorial normado, então a norma

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma contração fraca, e assim é contínua.

- Seja V um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_V$ e a métrica induzida d_V , e define no produto cartesiano $V \times V$ a norma:

$$\|\cdot\|_{V \times V} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \|x + y\|_{V \times V} = \|x\|_V + \|y\|_V$$

Então no espaço normado $V \times V$ com a norma $\|\cdot\|_{V \times V}$ e a métrica induzida $d_{V \times V}$, a soma

$$s : V \times V \rightarrow V$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

é uma contração fraca, e assim é contínua.

Em particular, a soma é contínua em $\mathbb{R}^n$.

0.0.3 Funções de Lipschitz, continuidade uniforme, e contrações

Uma função $f : M \rightarrow N$ pela qual existe $c > 0$ tal que, para todo $x, y \in M$

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$$

chama-se função **Lipschitz** (e c é a **constante de Lipschitz**). Como vimos sexta feira, funções Lipschitz são contínuas, pois fixado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon/c$, então

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) < \epsilon.$$

Assim, δ depende só de ϵ e da constante de Lipschitz, **não do ponto!!**. Então, funções de Lipschitz são más que contínuas, são **uniformemente contínuas** (o contrário é falso: controexemplo: $f(x) = \sqrt{x}$ em $((0, 1), d_E)$).

Definição 0.3. *Seja $f : M \rightarrow N$, onde (M, d) e (N, d') são espaços métricos. Então f é **uniformemente contínua** em $A \subseteq M$ se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in A$:*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Funções uniformemente contínuas são contínuas, em quanto funções contínuas não são necessariamente uniformemente contínuas. Porém, em compactos, funções contínuas são uniformemente contínuas:

Teorema 0.4. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua entre espaços métricos (M, d) e (N, d') . Se $K \subseteq M$ é compacto, então f é uniformemente contínua em K .*

Demonstração. 1. Seja f contínua em todo ponto do conjunto compacto K , então dado $\epsilon > 0$ e $x \in K$, existe $\delta = \delta(\epsilon/2, x) > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

2. Para cada $x \in K$, considera a bola aberta:

$$B(x, \delta(\epsilon/2, x)/2) := \{y \in M : d(x, y) < \delta/2\}.$$

3. Assim temos que a união destas bolas $B(x, \delta/2)$, com $x \in K$, é uma cobertura aberta de K , isso é:

$$K \subseteq \mathcal{B} = \bigcup_{x \in K} B(x, \delta/2).$$

4. Sendo K compacto, existe uma subcobertura finita de $\mathcal{B}$ cubrendo K , isso é, existem $x_1, \dots, x_n$ tal que

$$K \subseteq B(x_1, \delta_1/2 = \delta(\epsilon/2, x_1)/2) \cup \dots \cup B(x_n, \delta_n/2 = (\epsilon/2, x_n)/2).$$

5. Define

$$\hat{\delta} = \delta(\epsilon) = \frac{1}{2} \inf \{\delta_1 = \delta(\epsilon/2, x_1), \dots, \delta_n = (\epsilon/2, x_n)/2\}.$$

6. Sejam agora $x, y \in K$ tal que $d(x, y) < \hat{\delta}$, e vamos ver que $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

7. Por construção, existe $i \in [1, n]$ tal que $d(x_i, y) < \delta_i/2 = \delta(\epsilon/2, x_i)/2$, pois $y \in K$.

8. Sendo que $\hat{\delta} \leq \delta_i/2$, temos pela desigualdade triangular:

$$d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(y, x_i) < \delta_i/2 + \delta_i/2 = \delta_i = \delta(\epsilon/2, x_i)$$

9. Sendo f contínua, temos que

$$d'(f(x), f(x_i)) < \epsilon/2 \text{ e } d'(f(y), f(x_i)) < \epsilon/2$$

e assim utilizando a desigualdade triangular obtemos:

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_i)) + d'(f(y), f(x_i)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

Contrações em espaços métricos completos.

Uma função de Lipschitz $f : M \rightarrow N$ entre espaços métricos (M, d) e (N, d') é uma **contração** (ou contração forte) quando a constante de Lipschitz c satisfaz $c < 1$. Contrações num mesmo espaço métrico $f : M \rightarrow M$ tal que (M, d) é completo apresentam uma propriedade importante: tem um ponto fixo, isso é, um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Teorema 0.5. Teorema do ponto fixo de Banach. *Seja (M, d) um espaço métrico completo (e não vazio) $f : M \rightarrow M$ uma contração, então f apresenta um ponto fixo, único.*

Demonstração. 1. Sabemos que existe $c < 1$ tal que, para todo $x, y \in C$ temos

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y).$$

Seja $x_i \in M$, e define $x_2 = f(x_1)$, assim de definir inductivamente a sequência $(x_n)_n$ onde:

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}.$$

2. Precisamos demonstrar que a sequência (x_n) converge, pois o limite $\hat{x}$ vai ser o ponto fixo $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Sendo (M, d) completo, é bastante mostrar que (x_n) é de Cauchy.

3. Para isso, observamos que:

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq cd(x_2, x_1),$$

assim que, inductivamente:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq cd(x_n, x_{n-1}) \leq c^{n-1}d(x_2, x_1).$$

4. Então, se $m \geq n$, temos que pela desigualdade triangular $d(x_m, x_n)$ é menor igual da distância entre x_m e x_{m-1} , más a distância entre este último e o anterior, e seguindo até chegar á x_n , isso é:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (c^{m-2} + c^{m-3} + \dots + c^{n-1})d(x_2, x_1) = \\ &= c^{n-1}(c^{m-2-(n-1)} + c^{m-3-(n-1)} + \dots + 1)d(x_2, x_1) = \\ &= c^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{m-n-1} c^i\right)d(x_2, x_1) \leq c^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} c^i\right)d(x_2, x_1) = \\ &= c^{n-1}\left(\frac{1}{1-c}\right)d(x_2, x_1) = \frac{c^{n-1}}{1-c}d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

que converge à zero pois $c < 1$.

5. Vamos ver agora que o ponto fixo é único. Sejam $\hat{x}$ e $\hat{y}$ dois pontos fixos, então

$$d(\hat{x}, \hat{y}) = d(f(\hat{x}), f(\hat{y})) \leq cd(\hat{x}, \hat{y}),$$

assim que, se $\hat{x} \neq \hat{y}$, $c \geq 1$, absurdo.

□

0.0.4 Homeomorfismos

Um Homeomorfismo é uma função contínua

$$f : M \rightarrow N$$

tal que a inversa

$$f^{-1} : N \rightarrow M$$

também é contínua.

Exemplos:

- **Homeomorfismos entre bolas.** Seja V um espaço vetorial normado, $x \in V$ e $0 \neq c \in \mathbb{R}$, temos que as funções:

1. translação $t_x : V \rightarrow V, v \rightarrow v + x$,
2. homotetia $m_c : V \rightarrow V, v \rightarrow c \cdot x$,
3. suas inversas $(t_x)^{-1} = t_{-x} : V \rightarrow V, v \rightarrow v - x$,
4. $(m_c)^{-1} = m_{1/c} : V \rightarrow V, v \rightarrow x/c$

são contínuas, assim que translações e homotetias são **homeomorfismos**. Então, duas bolas abertas qualquer $B(x, c)$ e $B(y, d)$ são homeomorfas. De fato, o homeomorfismo é a função:

$$\phi = t_y \circ m_{d/c} \circ t_{-x} : E \rightarrow E$$

pois:

1. $t_{-x}(B(x, c)) = B(0, c)$,
2. $m_{d/c}(B(0, c)) = B(0, d)$,
3. $t_y(B(0, d)) = B(y, d)$.

Da mesma forma, duas bolas fechadas qualquer são homeomorfas.