

Aula vinte e tres: Homeomorfismos

Na última aula a gente demonstrou 2 teoremas importantes:

Teorema 0.1. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua entre espaços métricos (M, d) e (N, d') . Se $K \subseteq M$ é compacto, então f é uniformemente contínua em K .*

Teorema 0.2. Teorema do ponto fixo de Banach. *Seja (M, d) um espaço métrico completo (e não vazio) $f : M \rightarrow M$ uma contração, então f apresenta um ponto fixo, único.*

E também lembramos a diferença entre continuidade conjunta e separada, no caso de funções de mais variáveis ($f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Antes de estudar homeomorfismos, consideramos brevemente o caso 'inverso': funções de um espaço métrico até um produto cartesiano de espaços métricos.

0.0.1 Continuidade de projeções $p_i : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow M_i$ e de funções $f : M \rightarrow N \times P$

Lembramos que, se (M, d) e (N, d') são espaços métricos, o **produto cartesiano** $M \times N$ é o conjunto formado das duplas $p = (m, n)$, com $m \in M$ e $n \in N$. Tem vários tipos de métricas que podemos definir no produto Cartesiano $M \times N$:

$$\text{a métrica da soma } d_{M \times N}(p, p') = d(m, m') + d(n, n'),$$

$$\text{a métrica do max } d_{M \times N}(p, p') = \max\{d(m, m'), d(n, n')\},$$

$$\text{a métrica } d_{M \times N}(p, p') = \sqrt{d(m, m')^2 + d(n, n')^2},$$

e estas métricas são topologicamente equivalentes.

A **projeção**

$$p_m : M \times N \rightarrow M$$

$$(m, n) \rightarrow p_m(m, n) = m$$

é contínua em cada uma das métricas, pois é **contração fraca** em cada uma das métricas (monstramos utilizando em $M \times N$ a métrica do max):

$$d(p_m(m, n), p_m(\hat{m}, \hat{n})) = d(m, \hat{m}) \leq$$

$$\leq d_{M \times N}((m, n), (\hat{m}, \hat{n})) = \max\{d(m, \hat{m}), d(n, \hat{n})\}.$$

Da mesma forma demonstra-se que p_n é contínua, e más geralmente que para cada $i = 1, \dots, n$, é contínua a projeção

$$p_i : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow M_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow p_i(x) = x_i.$$

Sejam agora (M, d) , (N, d') (P, d'') espaços métricos, e considere a função:

$$f : M \rightarrow N \times P$$

$$m \longrightarrow f(m) = (n, p) = (f_1(m), f_2(m)).$$

As funções $f_1 : M \rightarrow N$ e $f_2 : M \rightarrow P$ se chamam *coordenadas* de f , e escrevemos (as vezes) $f = (f_1, f_2)$. Considerando as projeções

$$p_n : N \times P \rightarrow N, \text{ e } p_p : N \times P \rightarrow P$$

obtemos

$$f_1 = p_n \circ f, \text{ e } f_2 = p_p \circ f,$$

assim que, se f é continua, suas coordenadas f_1, f_2 também são. Vale o viceversa:

Proposição 0.3. *A função $f : M \rightarrow N \times P$ é continua (em $m_0 \in M$) sse suas coordenadas $f_1 : M \rightarrow N$ e $f_2 : M \rightarrow P$ são contínuas (em $m_0 \in M$).*

Demonstração. • Claramente se f é continua suas coordenadas também: vamos ver o viceversa.

- Consideremos $d_{N \times P}((n, p), (n', p')) = \max\{d'(n, n'), d''(p, p')\}$.
- Assim, dado $\epsilon > 0$, sendo f_1 e f_2 contínuas, existem δ_1 e δ_2 tal que:

$$d(m, m_0) < \delta_1 \Rightarrow d'(f_1(m), f_1(m_0)) = d'(n, n_0) < \epsilon$$

$$d(m, m_0) < \delta_2 \Rightarrow d''(f_2(m), f_2(m_0)) = d''(p, p_0) < \epsilon.$$

- Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então:

$$d(m, m_0) < \delta \Rightarrow d_{N \times P}(f(m), f(m_0)) = \max\{d'(n, n_0), d''(p, p_0)\} < \epsilon.$$

□

0.0.2 Homeomorfismos

Um Homeomorfismo é uma função continua

$$f : M \rightarrow N$$

tal que a inversa

$$f^{-1} : N \rightarrow M$$

também é contínua.

Bijecção não é necessariamente homomorfismo.

Perceba que, se

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N \\ m &\rightarrow n = f(m) \end{aligned}$$

é bijetiva (injetiva e sobrejetiva), então existe a função inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} : N &\rightarrow M \\ n = f(m) &\rightarrow m \end{aligned}$$

Em tudo caso, uma função contínua e bijetiva **não é necessariamente um homomorfismo**, pois a inversa não é necessariamente contínua, como o próximo exemplo mostra.

Exemplo:

Considere

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

A função

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\rightarrow (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

é contínua, pois suas coordenadas são contínuas, e é bijetora com inversa:

$$\begin{aligned} g = f^{-1} : \mathbb{S}^1 &\rightarrow [0, 2\pi) \\ z = (\cos(t), \sin(t)) &\rightarrow t = g(z), \end{aligned}$$

porém não é um homeomorfismo, pois a inversa não é contínua no ponto $\hat{z} = (1, 0)$.

- De fato, temos que $g(\hat{z}) = 0$.
- Define a sequência $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2\pi - 1/n$, $z_n = (\cos(t_n), \sin(t_n))$.
- Temos

$$z_n \rightarrow \hat{z}, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

$$\text{e } g(z_n) \not\rightarrow g(\hat{z}), \text{ pois } \forall n \in \mathbb{N}, |g(z_n) - g(\hat{z})| = |t_n - 0| = |2\pi - 1/n| > \pi.$$

Alternativamente, afirmo que $\mathbb{S}^1$ é compacto em $\mathbb{R}^2$, assim que $g = f^{-1}$ não pode ser contínua, pois sua imagem $[0, 2\pi)$ não é compacta em $\mathbb{R}$.

- Para ver que $\mathbb{S}^1$ é compacto, por o Teorema de Heine-Borel temos que ver que é fechado e limitado.
- Sendo $\mathbb{S}^1$ claramente limitado, vamos ver que é fechado em $\mathbb{R}^2$.
- Para isso, repare que a função

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

é contínua em $(\mathbb{R}^2, d_E)$ (assim que preimagem de fechados é fechado), que $\{1\}$ é fechado em $(\mathbb{R}, d_E)$, e que $\mathbb{S}^1 = F^{-1}(1)$.

0.0.3 Exemplos de homeomorfismos

1. Exemplos:

- **Homeomorfismos entre bolas.** Seja V um espaço vetorial normado, $x \in V$ e $0 \neq c \in \mathbb{R}$, temos que as funções:

- (a) translação $t_x : V \rightarrow V, v \rightarrow v + x$,
- (b) homotetia $m_c : V \rightarrow V, v \rightarrow c \cdot x$,
- (c) suas inversas $(t_x)^{-1} = t_{-x} : V \rightarrow V, v \rightarrow v - x$,
- (d) $(m_c)^{-1} = m_{1/c} : V \rightarrow V, v \rightarrow x/c$

são contínuas, assim que translações a homotetias são **homeomorfismos**. Então, duas bolas abertas qualquer $B(x, c)$ e $B(y, d)$ são homeomorfas. De fato, o homeomorfismo é a função:

$$\phi = t_y \circ m_{d/c} \circ t_{-x} : V \rightarrow V$$

pois:

- (a) $t_{-x}(B(x, c)) = B(0, c)$,
- (b) $m_{d/c}(B(0, c)) = B(0, d)$,
- (c) $t_y(B(0, d)) = B(y, d)$.

Da mesma forma, duas bolas fechadas qualquer são homeomorfas.

- No exemplo anterior, tínhamos dois conjuntos $B(x, c)$ e $B(y, d)$ num espaço normado V , e um homeomorfismo

$$\phi = t_y \circ m_{d/c} \circ t_{-x} : V \rightarrow V$$

$$\phi(B(x, c)) = B(y, d).$$

Isso de fato implica duas coisas:

- (a) as bolas $B(x, c)$ e $B(y, d)$ são homeomorfas,
 (b) estas bolas **estão topologicamente situadas da mesma maneira em V** .

Vamos ver agora um exemplo de conjuntos $X, Y \subset V$ homeomorfos, mas situados de forma diferente em V .

Sendo concretos, sejam $(V, d_V) = (\mathbb{R}, d_E)$ e $X = [0, 1] \cup \{2, 3\}$, $Y = [5, 6] \cup \{4, 8\}$ com a métrica induzida. Defina

$$h : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ 8 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É fácil ver que h é contínua, pois é contínua em $[0, 1]$, e nos pontos isolados $\{2\}$ e $\{3\}$ (pois são pontos isolados). Similmente, a inversa é contínua. Porém, não existe um homeomorfismo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(X) = Y$, pois toda função injetiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona.

- **Toda bola aberta em espaço vetorial normado é homeomorfa ao espaço mesmo.** Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Já sabemos que as bolas são homeomorfas entre elas, assim que basta provar que V é homeomorfo à bola aberta $B = B(0, 1)$. Considere a função

$$f : V \rightarrow B$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}.$$

Sendo:

- (a) a função norma $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\|$ contínua em V ,
 (b) a soma contínua (e em particular a soma em $\mathbb{R}$),
 (c) a multiplicação por escalar contínua (e $1/(1 + \|x\|) \in \mathbb{R}$)
 a função f é contínua em V . Sendo que, para todo $x \in V$,

$$\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1,$$

o contra-domínio é B . Definimos agora

$$g : B \rightarrow V$$

$$y \mapsto \frac{y}{1 - \|y\|}.$$

Sendo $y \in B \Rightarrow \|y\| < 1$, a função $g : B \rightarrow V$ é contínua pois a função norma, soma e multiplicação escalar é contínua. Também, uma conta fácil mostra que, para todo $y \in B$, temos $f(g(y)) = y$, e para todo $x \in V$ temos $g(f(x)) = x$, assim que $g = f^{-1}$ e f é um homeomorfismo.

- Em particular, **todo intervalo aberto limitado** é homeomorfo a $\mathbb{R}$. De fato, todo intervalo aberto em $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$, pois:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (a, \infty)$$

$$x \rightarrow a + e^x$$

é contínua com inversa contínua dada por

$$g : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \rightarrow \log(y - a);$$

e também

$$h : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, b)$$

$$x \rightarrow b - e^{-x}$$

é contínua com inversa contínua dada por

$$k : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \rightarrow -\log(b - y).$$