

Aula vinte e quatro: Sequências de funções contínuas e limites

Na semana passada a gente viu que:

1. Se $f : M \rightarrow N$ é função contínua e $K \subseteq M$ é compacto, $f|_K$ é uniformemente contínua.

- Ideia da prova: Fixado $\epsilon > 0$, cubro K com cobertura aberta:

$$K \subseteq \mathcal{B} = \bigcup_{x \in K} B(x, \delta/2),$$

tal que, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

- Sendo K compacto,

$$K \subseteq B(x_1, \delta_1/2 = \delta(\epsilon/2, x_1)/2) \cup \dots \cup B(x_n, \delta_n/2 = (\epsilon/2, x_n)/2).$$

- Considera $\hat{\delta} = \delta(\epsilon) = \frac{1}{2} \inf \{ \delta_1 = \delta(\epsilon/2, x_1), \dots, \delta_n = (\epsilon/2, x_n) \}$.

2. Seja (M, d) um espaço métrico completo (e não vazio) $f : M \rightarrow M$ uma contração (i.e., Lipschitz com $c < 1$), então f apresenta um ponto fixo, único.

- Ideia da prova: Define inductivamente a sequência

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Mostra que (x_n) é de Cauchy, assim que vai convergir para $\hat{x}$.
- Temos que $f(\hat{x}) = \hat{x}$, pois, sendo f contínua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x}),$$

e por construção:

$$f(\hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \hat{x}.$$

0.0.1 Limites de funções e continuidade

Lembramos que, dado um espaço métrico (M, d) e uma sequência (x_n) em M , dizemos que $a \in M$ é **limite** da sequência (x_n) quando, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $d(x_n, a) < \epsilon$ (isso é, quando (x_n) converge para a), e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Por outro lado, sejam (M, d) , (N, d') espaços métricos, $f : M \rightarrow N$, $a \in M$ e $b \in N$. Dizemos que b é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , e escrevemos:

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

quando, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), b) < \epsilon.$$

Segue da definição de limite e da caracterização de continuidade por sequências ($f : M \rightarrow N$ é contínua em $a \in M$ sse para cada sequência (x_n) em M convergendo para a , a sequência $(f(x_n))$ em N converge para $f(a)$) que:

Proposição 0.1. *Sejam (M, d) , (N, d') espaços métricos, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$;
2. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
3. para cada sequência (x_n) de M com $\lim_n x_n = a$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) (= f(a))$$

Demonstração. • $1 \Leftrightarrow 2$ Seja $f : M \rightarrow N$ contínua em $a \in M$ e $f(a) = b \in N$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon,$$

assim que

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Por outro lado, se $a \in M$ e $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon,$$

assim que f é contínua em a .

- $1 \Leftrightarrow 3$ Se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

assim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n).$$

Por outro lado, se por toda sequência (x_n) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(a),$$

e por el Teorema anterior f é continua em a .

□

0.0.2 Sequências de funções contínuas

Lembramos que, se X é um conjunto, $Y \subseteq X$, e (M, d) é um espaço métrico, a sequências de funções

$$f_n : X \rightarrow M$$

$$x \rightarrow (f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$$

converge em Y para a função

$$f : X \rightarrow M$$

pontualmente quando, para cada $x \in Y$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n(x, \epsilon)$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon;$$

em quanto converge *uniformemente* quando, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n(\epsilon)$ tal que *para todo* $x \in Y$ temos

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Não sempre o limite de funções contínuas é contínuo, lembremos exemplos:

- A sequência de funções

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow (x/n)_{n \in \mathbb{N}} = (x, x/2, \dots, x/n, \dots),$$

converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para a função nula $f(x) \equiv 0$, que é contínua.

- A sequência de funções

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow (x/n)_{n \in \mathbb{N}} = (x, x/2, \dots, x/n, \dots),$$

converge uniformemente em todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ para a função nula, que segue contínua.

- A sequência de funções

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow (x^n)_{n \in \mathbb{N}} = (x, x^2, \dots, x^n, \dots)$$

converge pontualmente em $[0, 1]$ para a função:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{on } [0, 1) \\ 1 & \text{on } 1 \end{cases}$$

que é descontínua.

- Seja $0 < \delta < 1$, então a sequência de funções

$$f_n : [0, 1 - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow (x^n)_{n \in \mathbb{N}} = (x, x^2, \dots, x^n, \dots)$$

converge uniformemente para a função nula, que é contínua.

Assim que vimos 2 exemplos de sequências de funções contínuas convergendo pontualmente, e 2 exemplos de sequências de funções contínuas convergendo uniformemente. Nos casos em que a sequências de funções contínuas convergem uniformemente sempre achamos como limite uma função contínua, mas no caso a convergência é pontual o limite nem sempre foi contínuo. Isso motiva o seguinte:

Teorema 0.2. *Sejam (M, d) , (N, d') espaços métricos. Se uma sequência de funções:*

$$f_n : M \rightarrow N$$

contínuas em $a \in M$, converge uniformemente para a função

$$f : M \rightarrow N,$$

então f é contínua em $a \in M$.

Demonstração. • Fixado $\epsilon > 0$ queremos $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

- Sendo $f_n \rightarrow f$ uniformemente, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ e $x \in M$,

$$d'(f_n(x), f(x)) < \epsilon/3.$$

- Sendo f_{n_0} contínua, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta_0 \Rightarrow d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) < \epsilon/3.$$

- Assim, pela desigualdade triangular (aplicada duas vezes) temos que:

$$d(x, a) < \delta_0 \Rightarrow$$

$$d'(f(x), f(a)) \leq d'(f(x), f_{n_0}(x)) + d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + d'(f_{n_0}(a), f(a)) < \epsilon.$$

□

Corolário 0.3. *Sejam (M, d) , (N, d') espaços métricos, seja $a \in M$ e*

$$f_n : M \rightarrow N$$

sequência de funções contínuas em M convergendo uniformemente para a função

$$f : M \rightarrow N.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)).$$

Demonstração. Por hipótese, $f_n : M \rightarrow N$ é uma sequência de funções contínuas em M , então para todo n

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a).$$

Já que f_n converge uniformemente para f , temos que, em particular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a).$$

Por outro lado, f_n converge uniformemente para f , assim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

e pelo Teorema anterior o limite é contínuo, assim que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

□

0.1 Resumo: Continuidade

Teorema 0.4. *Sejam (M, d) , e (N, d') espaços métricos, e $f : M \rightarrow N$ uma função. Então são equivalentes:*

1. *f é contínua em $a \in M$;*

2. para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon;$$

3. se (x_n) é uma sequência em M convergendo para a , então a sequência $(f(x_n))$ em N converge para $f(a)$;

4. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$;

5. para cada sequência (x_n) de M com $\lim_n x_n = a$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) (= f(a))$$

Vimos que:

- Composição (e em particular restrições) de funções contínuas é contínua;
- Funções de Lipschitz, isso é funções $f : M \rightarrow N$ pelas quais existe $c > 0$ tal que, para todo $x, y \in M$

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$$

são contínuas;

- Contrações fracas, isso é, funções $f : M \rightarrow N$ tal que, para todo $x, y \in M$

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

são contínuas, por ser Lipschitz;

- Em particular, num espaço normado, a norma, a soma, e a multiplicação escalar são contínuas;

0.1.1 Resumo: Continuidade em espaços métricos produto

Se (M, d) e (N, d') são espaços métricos, o produto cartesiano $M \times N$ é o conjunto formado das duplas $p = (m, n)$, com $m \in M$ e $n \in N$. Tem vários tipos de métricas (equivalentes) que podemos definir no produto Cartesiano $M \times N$:

$$\text{a métrica da soma } d_{M \times N}(p, p') = d(m, m') + d(n, n'),$$

$$\text{a métrica do max } d_{M \times N}(p, p') = \max\{d(m, m'), d(n, n')\},$$

$$\text{a métrica } d_{M \times N}(p, p') = \sqrt{d(m, m')^2 + d(n, n')^2}.$$

As imersões isométricas

$$j^{\hat{m}} : N \rightarrow M \times N \quad j^{\hat{n}} : M \rightarrow M \times N$$

$$n \rightarrow (\hat{m}, n) \quad m \rightarrow (m, \hat{n})$$

são contínuas (utiliza a métrica do max e $\epsilon = \delta$).

Continuidade conjunta vs separada

Se (M, d) , (N, d') , (P, d'') espaços métricos. Podemos considerar uma função

$$f : M \times N \rightarrow P$$

$$x = (m, n) \longrightarrow p = f(m, n)$$

como função de 2 variáveis, sendo que $m \in M$ e $n \in N$. Utilizando em $M \times N$ a métrica do max, f é contínua no ponto $\hat{x} = (\hat{m}, \hat{n})$ se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$d_{M \times N}(x, \hat{x}) < \delta \Rightarrow d''(f(x), f(\hat{x})) < \epsilon.$$

Por outro lado, f é contínua no ponto $\hat{x} = (\hat{m}, \hat{n})$ **relativamente à primeira variável** quando a função

$$f^{(\cdot, \hat{n})} : M \rightarrow P$$

$$m \rightarrow p = f(m, \hat{n})$$

é contínua no ponto $m = \hat{m}$, e analogamente se define continuidade respeito as outras variáveis.

Se f for contínua relativamente à toda variável, f se chama de **contínua separadamente** em relação a cada uma das suas variáveis. Se f for contínua, então é contínua separadamente em relação a cada uma das suas variáveis, pois

$$f^{(\cdot, \hat{n})} = f \circ j^{\hat{n}},$$

más a recíproca é falsa. **Controexemplo:**

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é separadamente contínua em zero, mas não é contínua em zero.

Vimos que a **projeção**

$$p_m : M \times N \rightarrow M$$

$$(m, n) \rightarrow p_m(m, n) = m$$

é contínua (em cada uma das métricas do espaço métrico produto), pois é **contração fraca** em cada uma das métricas

Sejam agora (M, d) , (N, d') (P, d'') espaços métricos, e considere a função:

$$f : M \rightarrow N \times P$$

$$m \longrightarrow f(m) = (n, p) = (f_1(m), f_2(m)).$$

As funções $f_1 : M \rightarrow N$ e $f_2 : M \rightarrow P$ se chamam *coordenadas* de f , e escrevemos (as vezes) $f = (f_1, f_2)$.

Proposição 0.5. *A função $f : M \rightarrow N \times P$ é contínua (em $m_0 \in M$) sse suas coordenadas $f_1 : M \rightarrow N$ e $f_2 : M \rightarrow P$ são contínuas (em $m_0 \in M$).*

0.1.2 Resumo: Homeomorfismos

Um Homeomorfismo é uma função contínua

$$f : M \rightarrow N$$

tal que a inversa

$$f^{-1} : N \rightarrow M$$

também é contínua.

Bijecção não é necessariamente homomorfismo (Controexemplo:
 $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1, t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$)

- Bolas abertas num espaço normado são homeomorfas,
- bolas fechadas num espaço normado são homeomorfas,
- bolas abertas num espaço normado são homeomorfas ao espaço inteiro,
- em particular, o intervalo $(0, 1)$ é homomomorfo a $\mathbb{R}$.

0.1.3 Resumo: Continuidade uniforme

Seja $f : M \rightarrow N$, onde (M, d) e (N, d') são espaços métricos. Então f é **uniformemente contínua** em $A \subseteq M$ se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in A$:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Funções de Lipschitz são uniformemente continuas!

- Se $f : M \rightarrow N$ é função contínua e $K \subseteq M$ é compacto, $f|_K$ é uniformemente contínua;

Por outro lado, uma sequência de funções $f_n : M \rightarrow N$ converge uniformemente para $f : M \rightarrow N$ se para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $x \in M$ temos $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

- O limite uniforme de uma sequência de funções continuas é contínuo.