Aula vinte e cinco: Funções lineares

0.0.1 Resumo: Homeomorfismos

Um Homeomorfismo é uma função continua

$$f : M \to N$$

tal que a inversa

$$f^{-1} : N \to M$$

também é contínua.

Bijeção não é necessariamente homemomorfismo (Controexemplo: $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$, $t \to (cos(t), sin(t))$)

- Bolas abertas num espaço normado são homeomorfas,
- bolas fechadas num espaço normado são homeomorfas,
- bolas abertas num espaço normado são homeomorfas ao espaço entero,
- em particular, o intervalo $(0, 1)$ é homemomorfo a $\mathbb{R}$.

0.0.2 Resumo: Continuidade uniforme

Seja $f : M \to N$, onde (M, d) e (N, d') são espaços métricos. Então f é **uniformemente contínua** em $A \subseteq M$ se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x, $y \in A$:

$$d(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Funções de Lipschitz são uniformemente continuas!

- Se $f : M \to N$ é função contínua e $K \subseteq M$ é compacto, $f_{|K}$ é uniformemente continua;

Por outro lado, uma sequência de funções $f_n : M \to N$ converge uniformemente para $f : M \to N$ se para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $x \in M$ temos $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

- O limite uniforme de uma sequência de funções continuas é continuo.

0.0.3 Funções lineares

Sejam V e W espaços vetoriais reais. Dizemos que

$$T : V \to W$$

é uma função linear se, para todo u, $v \in V$ e todo $a \in \mathbb{R}$ temos:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$,
2. $T(a \cdot u) = aT(u)$

ou escrito más brevemente:

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v).$$

Percebam que segue, se $T : V \to W$ é linear e 0_V é o vetor nulo de V e 0_W é o vetor nulo de W, temos

$$T(0_V) = T(0 \cdot 0_V) = 0T(0_V) = 0_W,$$

assim que **uma trasformação linear envia zero em zero**. É muito fácil demonstrar que se zero é a única preimagem de zero, então T é injetiva.

Proposição 0.1. *Se $T : V \to W$ é injetiva sse $T(x) = 0_W \Rightarrow x = 0_V$*

Demonstração.

- T injetiva implica $T(x) = 0_W \Rightarrow x = 0_V$.
  Sendo que aplicações lineares enviam zero em zero, se T é injetiva então $T(x) = T(0)$ implica $x = 0$.
- $T(x) = 0_W \Rightarrow x = 0_V$ implica T injetiva.
  Por outro lado, se T não é injetiva, então existem $x \neq y \in V$ tal que $T(x) = T(y)$, então pela linearidade temos $0_W = T(x) - T(y) = T(x - y)$, assim o vetor $x - y \neq 0_V$ é tal que $T(x - y) = 0_W$.

□

0.0.4 Continuidade das funções lineares

Teorema 0.2. *Sejam V e W espaços vetoriais normados, e $T : V \to W$ linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é contínua,*
2. *T é contínua em $0_V \in V$,*
3. *existe $c > 0$ tal que $\|T(v)\| \leq c$ para todo $v \in V$,*

4. existe $c > 0$ tal que $\|T(v) - T(w)\| \leq c\|v - w\|$ para todo v, $w \in V$,

Demonstração. Vamos provar $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$, assim que temos que provar $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$, pois se T é contínua também é contínua em 0_V, e se existe $c > 0$ tal que $\|T(v) - T(w)\| < c\|v - w\|$ para todo v, $w \in V$ então T é Lipschitz e assim contínua.

- A implicação $3 \Rightarrow 4$ é bem fácil: sendo T linear, temos

$$\|T(v) - T(w)\| = \|T(v - w)\|,$$

  e sendo $u - w \in V$, por (3) temos

$$\|T(v) - T(w)\| = \|T(v - w)\| < c\|v - w\|.$$

- Vamos ver $2 \Rightarrow 3$.
  - Sabemos que T é contínua em 0 e que $T(0) = 0$, assim que para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v - 0\| = \|v\| < \delta \Rightarrow \|T(v) - T(0)\| = \|T(v)\| < 1.$$

  - Seja agora $c > 1/\delta$ qualquer, e temos

$$T(0) = 0 = c \cdot 0$$

    assim que (3) é certa em zero.
  - Vamos ver que (3) é certa para $v \neq 0$. Temos

$$\|\frac{v}{c\|v\|}\| = \frac{1}{c} < \delta \Rightarrow T(\frac{v}{c\|v\|}) < 1,$$

    então pela linearidade temos

$$T(\frac{v}{c\|v\|}) = \frac{T(v)}{c\|v\|} < 1 \Leftrightarrow T(v) < c\|v\|.$$

□

Corolário 0.3. *Sejam V e W espaços vetoriais normados, o mapa linear $T : V \to W$ é continuo se e só se é limitado na bola unitária, isso é, sse existe finito*

$$l = \sup_{x, \|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Demonstração. Se T é contínua, então existe $c > 0$ tal que, para todo $x \in V$, temos

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|,$$

assim que isso também vale na bola unitária, e assim para todo $x \in V$ com $\|x\| \leq 1$ temos

$$\|T(x)\| \leq c\|x\| \leq c.$$

Assume agora que T seja limitada na bola unitária:

$$\|T(x)\| \leq l \text{ para todo } x : \|x\| \leq 1,$$

então para todo x, $y \in V$ temos (escrevendo $x - y = \|x - y\| \frac{x-y}{\|x-y\|}$)

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|(x - y)\|\|T(\frac{x - y}{\|x - y\|})\| \leq \|T\|\|x - y\|,$$

assim que T é Lipschitz, e então contínua. $\square$

0.0.5 Representação matricial

Seja $T : V \to W$ uma função linear entre espaços de dimensão finita V e W, seja $e_1, .., e_n$ uma base ordenada de V e $w_1, .., w_m$ uma base ordenada de W. Temos, para todo $k \in [1, n]$

$$T(e_k) = a_{1,k}w_1 + .. + a_{m,k}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,k}w_i$$

assim, que, se $v = c_1e_1 + .. + c_ne_n$, pela linearidade temos:

$$T(v) = T(c_1e_1 + .. + c_ne_n) = c_1T(e_1) + .. + c_nT(e_n) =$$

$$= c_1(a_{1,1}w_1 + .. + a_{m,1}w_m) + .. + c_n(a_{1,n}w_1 + .. + a_{m,n}w_m) =$$

$$= c_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i,1}w_i + ... + c_n \sum_{i=1}^{m} a_{i,n}w_i = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{i=1}^{m} a_{i,k}w_i$$

Isso é, podemos representar a função linear T por meio da matriz A formada pelos $a_{i,k}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

e obtemos

$$T(v) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{i=1}^{m} a_{i,k} w_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_k a_{i,k} w_i = Av$$

Em particular, se $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$ temos

$$x = c_1 e_1 + .. + c_n e_n \in \mathbb{R}^n, \; T(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_k b_{i,k} w_i = Bx = y.$$

Nesse caso, seja

$$M = \sup_{i,j} b_{i,j},$$

e sendo que, para todo $k \in [1, n]$,

$$|c_k| \leq |x|,$$

obtemos, para $i \in [1, m]$

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_k b_{i,k} w_i, \text{ então } |y_i| = |\sum_{k=1}^{n} c_k b_{i,k}| \leq |c_1 b_{i,1}| + .. + |c_n b_{i,n}| \leq nM|x|.$$

Sendo que

$$|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2},$$

obtemos

$$|y| = |T(x)| \leq \sqrt{mn^2 M^2 |x|^2},$$

ou em outras palavras

$$|T(x)| \leq \sqrt{m} n M |x|.$$

Temos demonstrado o seguinte Teorema:

Teorema 0.4. *Toda função linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua.*

Observação: De fato, toda função linear entre espaços normados de dimensão finita é contínua.