Aula vinte e seis: Diferenciabilidade

Lembramos que uma função

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

possui uma derivada em $c \in \mathbb{R}$ quando existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

ou equivalentemente quando, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon$$

por $L \in \mathbb{R}$. Nesse caso escrevemos $f'(c) = L$.

Equivalentemente, f é derivável em $c \in \mathbb{R}$ quando existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = L,$$

e escrevemos $f'(c) = L$. Assim, se f é derivável em $c \in \mathbb{R}$, podemos definir

$$E(c, h) = \begin{cases} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) & \text{se } h \neq 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

e então aproximar f numa vizinhança de c com

$$f(c+h) = f'(c)h + E(c, h)h + f(c) = f(c) + f'(c)h + E(c, h)h,$$

que é a fórmula de Taylor (da primeira ordem) para aproximar $f(c+h) - f(c)$ por meio de $f'(c)h$. El erro é $E(c, h)h$, e temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(c, h) = 0.$$

Esta é a propriedade essencial da derivada (num ponto): é uma aproximação linear da função (no ponto). Assim, com esta ideia podemos estender a definição de derivada no caso de mais variáveis:

Definição 0.1. *Seja*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

*dizemos que f é diferenciável no ponto $c \in \mathbb{R}^n$ se existe uma **função linear***

$$T_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que

$$f(c+h) = f(c) + T_c(h) + |h|E(c, h),$$

com

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(c, h) = 0.$$

Equivalentemente, dizemos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $c \in \mathbb{R}^n$ quando existe uma função linear $T_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c) - T_c(x - c)| < \epsilon,$$

ou também

$$|h| < \delta \Rightarrow |f(c + h) - f(c) - T_c(h)| < \epsilon|h|$$

Assim, se f é diferenciável em $c \in \mathbb{R}^n$, podemos aproximar f numa vizinhança de c com

$$f(c + h) = f(c) + T_c(h) + |h|E(c, h),$$

isso, é, podemos aproxima-la coa **função afim**

$$A(c + h) = T_c(h) + f(c)$$

(uma função afim é a composta de uma função linear com uma traslação).

Vamos ver que a derivada, se existir, é única:

Proposição 0.2. *Seja*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$c \in \mathbb{R}^n$. *A função f tem como máximo uma derivada em c .*

Demonstração. Suponha que temos duas funções lineares

$$T_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad T_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

tal que:

$$|h| < \delta \Rightarrow |f(c + h) - f(c) - T_1(h)| < \epsilon|h| \text{ e } |f(c + h) - f(c) - T_2(h)| < \epsilon|h|$$

Assim temos, para todo $\epsilon > 0$ e $h \in \mathbb{R}^n$ com $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned} 0 \leq |T_1(h) - T_2(h)| &= |T_1(h) - f(c + h) + f(c) + f(c + h) - f(c) - T_2(h)| \leq \\ &\leq |T_1(h) - f(c + h) + f(c)| + |f(c + h) - f(c) - T_2(h)| = \\ &= |f(c + h) - f(c) - T_1(h)| + |f(c + h) - f(c) - T_2(h)| < 2\epsilon|h|. \end{aligned}$$

Suponha agora $T_1 \neq T_2$, então existe $z \neq 0$ tal que $T_1(z) \neq T_2(z)$ (pois, sendo T_1 e T_2 lineares, temos $T_1(0) = 0 = T_2(0)$). Define

$$z_0 = \frac{\delta z}{2|z|}, \Rightarrow |z_0| = \delta/2 < \delta,$$

e percebe que, pela linearidade,

$$T_1(z) \neq T_2(z) \Rightarrow T_1(z_0) = \frac{\delta T_1(z)}{2|z|} \neq \frac{\delta T_2(z)}{2|z|} = T_2(z_0).$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$ temos

$$|z_0| < \delta \Rightarrow 0 \leq |T_1(z_0) - T_2(z_0)| < 2\epsilon|z_0|,$$

assim que $T_1(z_0) = T_2(z_0)$, contradição. □

Exemplos:

1. Seja $c \in \mathbb{R}^m$, e considere a função constante:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \rightarrow c.$$

Então, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos $f(x) - f(y) = 0$. Assim que f é diferenciável em cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$, com $f'(x) \equiv 0$.

2. Considere uma função linear

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos

$$T(x) - T(y) - T(x - y) = 0,$$

assim que T é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e $T' = T$.

Vamos ver agora que uma função diferenciável é contínua:

Proposição 0.3. *Seja*

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

diferenciável em $c \in A$, então existem $\delta > 0$ e $K > 0$ tal que

$$|x - c| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq K|x - c|.$$

Em particular, f é Lipschitz numa δ -vizinhança de c , assim que é contínua em c .

Demonstração. Temos que, se f é diferenciável em c , para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c) - T_c(x - c)| < 1 \cdot |x - c|,$$

e sendo

$$|f(x) - f(c)| - |T_c(x - c)| \leq |f(x) - f(c) - T_c(x - c)| < |x - c|,$$

obtemos

$$|f(x) - f(c)| < |T_c(x - c)| + |x - c|.$$

Sendo $T_c : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ função linear entre espaços de dimensão finita, existe $B > 0$ tal que, para todo $x, y \in A$

$$|T_c(x) - T_c(y)| \leq B|x - y|,$$

assim que

$$|f(x) - f(c)| < |T_c(x - c)| + |x - c| \leq B|x - c| + |x - c| = (B + 1)|x - c|.$$

□