Aula vinte e sete: Diferenciabilidade vs derivadas parciais

Na aula passada, a gente identificou a propriedade essencial da derivada (num ponto): é uma aproximação linear (afim) da função (no ponto). Assim, com esta ideia podemos estender a definção de derivada no caso de mais variáveis:

Definição 0.1. *Seja*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

dizemos que f é diferenciável no ponto $c \in \mathbb{R}^n$ se existe uma ***função linear***

$$Df_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

e uma função vetorial

$$E(c, \cdot) = E_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que

$$f(c+h) = f(c) + Df_c(h) + |h|E(c,h),$$

com

$$\lim_{|h|\to 0} E(c,h) = 0.$$

Assim, se f é diferenciável em $c \in \mathbb{R}^n$, podemos aproximar f numa vizinhança de c com

$$f(c+h) = f(c) + Df_c(h) + |h|E(c,h),$$

isso, é, podemos aproxima-la coa **função afim**

$$A(c+h) = Df_c(h) + f(c)$$

(uma função afim é a composta de uma função linear com uma traslação).

Perceba que, de

$$f(c+h) = f(c) + Df_c(h) + |h|E(c,h),$$

obtemos

$$\frac{f(c+h) - f(c) - Df_c(h)}{|h|} = E(c,h).$$

Assim podemos escrever a definição anterior da forma seguinte:

Definição 0.2. *A função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $c \in \mathbb{R}^n$ quando existe uma função linear $Df_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - Df_c(h)}{|h|} = 0,$$

i.e, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|h| < \delta \Rightarrow \frac{|f(c+h) - f(c) - Df_c(h)|}{|h|} < \epsilon \Leftrightarrow |f(c+h) - f(c) - Df_c(h)| < \epsilon|h|$$

(Perceba que, nesse último caso, h pode ser zero, e nesse caso $Df_c(h) = 0$).

Chamando $y = c+h$, podemos dizer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $c \in \mathbb{R}^n$ quando existe uma função linear $Df_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|y - c| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(c) - Df_c(y-c)| < \epsilon \cdot |y - c|,$$

ou de forma mais compacta

$$\lim_{y\to c} \frac{f(y) - f(c) - Df_c(y-c)}{|y-c|} = 0.$$

(Percebe que a única diferença entre forma original e compacta é que, na original, y pode ser igual a c, em quanto na compacta não). **Notação**: As vezes, indicaremos Df_c como $f'(c)$.

Na aula passada a gente demonstrou:

- Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tem em $c \in \mathbb{R}^n$ como máximo uma derivada (a derivada, se existir, é única).
- Seja
$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
diferenciável em $c \in A$, então existem $\delta > 0$ e $K > 0$ tal que
$$|x - c| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq K|x - c|.$$
Em particular, f é Lipshitz em c, assim que é contínua em c (uma função diferenciável é contínua)

Observação Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se Lipshitz em $c \in \mathbb{R}^n$ quando existem constantes $C > 0$ e $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq C|x - c|.$$

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é localmente Lipshitz se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

(equivalentemente -usando a desigualdade triangular- uma função é L.L em c se é Lipshitz numa vizinhança de c. Isso é, $\hat{C} = 2C > 0$ e $\delta > 0$ tal que

$$|x - c|, |y - c| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(c) + f(c) - f(y)| \leq \hat{C}|x - y|.$$

) Uma função pode ser localmente Lipshitz em todo ponto, más não ser Lipshitz, pois pode não ter uma constante que funcione para todo mundo. Exemplo: a função $1/x$.

Vimos, como exemplos, que:

1. Se $f \equiv c$, $f'(x) \equiv 0$.

2. Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear, T é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e $T' = T$.

0.1 Derivadas parciais

Definição 0.3. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $c \in \mathring{A}$, e $u \in \mathbb{R}^n$. O vetor $D_u f(c) \in \mathbb{R}^m$ diz-se a **derivada parcial de** f **em relação à** u quando, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|t| < \delta \Rightarrow |\frac{f(c + tu) - f(c)}{t} - D_u f(c)| < \epsilon,$$

ou equivalentemente

$$D_u f(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f(c + tu) - f(c)}{t}.$$

Notação: As vezes, indicaremos $D_u f(c)$ como $f_u(c)$.

Teorema 0.4. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em $c \in \mathring{A}$, e seja $u \in \mathbb{R}^n$. Então $D_u f(c)$ existe e*

$$D_u f(c) = Df(c)(u).$$

Demonstração. Perceba primero que, se $D_u f(c)$ existir, $D_u f(c) \in \mathbb{R}^m$, e que $Df(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função linear, assim que $Df(c)(u) \in \mathbb{R}^m$.

Por hipótesis f é diferenciável em c, assim que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|h| < \delta \Rightarrow \frac{|f(c+h) - f(c) - Df_c(h)|}{|h|} < \epsilon.$$

Em particular, por $h = tu$ temos

$$|tu| < \delta \Rightarrow |f(c+tu) - f(c) - Df_c(tu)| < \epsilon |tu|.$$

Se $u = 0$ temos $Df_c(0) = 0$, assim que podemos supor $u \neq 0$. Nesse caso temos

$$0 < t < \frac{\delta}{|u|} \Rightarrow \frac{|f(c+tu) - f(c) - Df_c(tu)|}{t} = |\frac{f(c+tu) - f(c)}{t} - D_u f(c)| < \epsilon |u|,$$

e assim $Df(c)(u)$ é a derivada parcial de f em relação à u (perceba que $|u|$ é uma costante).

$\square$

Seja agora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e $u = e_1 = (1, 0, .., 0)$, então a derivada parcial em relação à u é a derivada respeito a primera variável, isso é $D_1 f$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, e similmente tomando $e_2, ..e_n$ achamos todas as derivadas parciais. O Teorema anterior tem o seguinte:

Corolário 0.5. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $c \in \mathring{A}$. Então toda derivada parcial $D_1 f(c), .., D_n f(c)$ existe em $\mathbb{R}$, e se $u = (u_1, .., u_n) \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$Df(c)(u) = D_1 f(c) u_1 + .. + D_n f(c) u_n.$$

Demonstração. Percebam primero que $Df(c)(u) \in \mathbb{R}$, e que cada derivada parcial também, assim que $D_1 f(c) u_1 + .. + D_n f(c) u_n \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema anterior, temos, para $i \in [1, n]$:

$$D_i f(c) = Df(c)(e_i),$$

e se $u = (u_1, .., u_n)$ temos, por linearidade:

$$Df(c)(u) = Df(c)(u_1 e_1 + .. + u_n e_n) =$$

$$= u_1 Df(c)(e_1) + .. + u_n Df(c)(e_n) = u_1 D_1 f(c) + .. + u_n D_n f(c).$$

$\square$