Aula vinte e oito: Existencia da derivada

Nas aulas passadas, a gente identificou a propriedade essencial da derivada (num ponto): é uma aproximação linear (afim) da função (no ponto).

Definição 0.1. *A função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $c \in \mathbb{R}^n$ quando existe uma função linear $Df_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - Df_c(h)}{|h|} = 0,$$

i.e, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|h| < \delta \Rightarrow \frac{|f(c+h) - f(c) - Df_c(h)|}{|h|} < \epsilon \Leftrightarrow |f(c+h) - f(c) - Df_c(h)| < \epsilon|h|$$

(Perceba que, nesse último caso, h pode ser zero, e nesse caso $Df_c(h) = 0$).

Vimos que:

- A derivada, se existir, é única.
- Uma função diferenciável num ponto é contínua no ponto
- Se $f \equiv c$, $f'(x) \equiv 0$.
- Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear, T é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e $T' = T$.

0.1 Derivadas parciais

Definição 0.2. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $c \in \mathring{A}$, e $u \in \mathbb{R}^n$. O vetor $D_u f(c) \in \mathbb{R}^m$ diz-se a **derivada parcial de f em relação à** u quando, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|t| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(c+tu) - f(c)}{t} - D_u f(c)\right| < \epsilon,$$

ou equivalentemente

$$D_u f(c) = \lim_{t\to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t}.$$

Notação: As vezes, indicaremos $D_u f(c)$ como $f_u(c)$.

Teorema 0.3. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em $c \in \mathring{A}$, e seja $u \in \mathbb{R}^n$. Então $D_u f(c)$ existe e*

$$D_u f(c) = Df(c)(u).$$

Seja agora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e $u = e_1 = (1, 0, .., 0)$, então a derivada parcial em relação à u é a derivada respeito a primera variável, isso é $D_1 f$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, e similmente tomando $e_2, ..e_n$ achamos todas as derivadas parciais. O Teorema anterior tem o seguinte:

Corolário 0.4. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $c \in \mathring{A}$. Então toda derivada parcial $D_1 f(c), .., D_n f(c)$ existe em $\mathbb{R}$, e se $u = (u_1, .., u_n) \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$Df(c)(u) = D_1 f(c) u_1 + .. + D_n f(c) u_n.$$

0.2 Existencia das derivadas

Vamos demonstrar agora que, quando $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função que tem derivadas parciais **contínuas** num ponto, então é diferenciável nesse ponto. Antes disso, vamos lembrar o Teorema do valor médio:

Teorema 0.5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe $x \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a).$$

Perceba que, se

$$f^{(c_1,..,c_{i-1},\cdot,c_{i+1},..,c_n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) este Teorema nos diz que existe $x \in (a, b)$ tal que

$$f(c_1, .., c_{i-1}, b, c_{i+1}, .., c_n) - f(c_1, .., c_{i-1}, a, c_{i+1}, .., c_n) = f'(c_1, .., c_{i-1}, x, c_{i+1}, .., c_n)(b - a) =$$

$$= D_i f(c_1, .., c_{i-1}, x, c_{i+1}, .., c_n)(b - a).$$

Teorema 0.6. *Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e $c \in \mathring{A}$. Se as derivadas parciais $Df_1(c), .., Df_n(c)$ existem numa vizinhança de c e são contínuas em c, então f é diferenciável em c e para $h = (h_1, .., h_n)$ temos*

$$Df_c(h) = Df_1(c) h_1 + ..Df_n(c) h_n$$

Demonstração.

1. Sendo que para cada i a derivada parcial $Df_i(c)$ existe numa vizinhança de c e é contínua em c, temos que para $\epsilon > 0$ existe $\delta_i > 0$ tal que

   $$|x - c| < \delta_i \Rightarrow |Df_i(x) - Df_i(c)| < \epsilon.$$

   Seja $\delta = \min_i \delta_i$, então obtemos

   $$|x - c| < \delta \Rightarrow \forall i, |Df_i(x) - Df_i(c)| < \epsilon.$$

2. Define agora os seguintes $z_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in [1, n]$

   (a) $z_0 = x = (x_1, .., x_n)$,
   (b) $z_1 = (c_1, x_2, .., x_n)$,
   (c) $z_i = (c_1, .., c_{i-1}, c_i, x_{i+1}, .., x_n)$,
   (d) $z_{n-1} = (c_1, .., c_{n-1}, x_n)$,
   (e) $z_n = c = (c_1, .., c_n)$

   e perceba que

$$|x - c| < \delta \Leftrightarrow \sqrt{\sum_i^n (x_i - c_i)^2} < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall i, |z_i - c| = \sqrt{\sum_{j=1}^i (x_j - c_j)^2} < \delta$$

3. Considere

$$f(x) - f(c) = f(x_1, .., x_n) - f(c_1, .., c_n) =$$
$$f(x_1, .., x_n) - f(c_1, x_2, .., x_n) + f(c_1, x_2, .., x_n) -$$
$$-f(c_1, c_2, x_3, .., x_n) + f(c_1, c_2, x_3, .., x_n) - ...$$
$$-f(c_1, .., c_i, x_{i+1}, .., x_n) + f(c_1, .., c_i, x_{i+1}, .., x_n) - ... -$$
$$-f(c_1, .., c_{n-1}, x_n) + f(c_1, .., c_{n-1}, x_n) - f(c_1, .., c_n) =$$
$$f(z_0) - f(z_1) + f(z_1) - f(z_2) + f(z_2) - .. - f(z_i) + f(z_i) - .. - f(z_{n-1}) + f(z_{n-1}) - f(z_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^n f(z_{i-1}) - f(z_i).$$

4. Perceba que, para cada i temos

$$f(z_{i-1}) - f(z_i) = f(c_1, .., c_{i-1}, x_i, x_{i+1}, .., x_n) - f(c_1, .., c_{i-1}, c_i, x_{i+1}, .., x_n),$$

   assim que, pelo Teorema do valor médio, existe $\bar{z}_i \in (z_{i-1}, z_i) =$
   $= ((c_1, .., c_{i-1}, x_i, x_{i+1}, .., x_n), (c_1, .., c_{i-1}, c_i, x_{i+1}, .., x_n)) \subset (c, x)$ tal que

$$f(z_{i-1}) - f(z_i) = (x_i - c_i) D_i f(\bar{z}_i).$$

5. Assim temos

$$f(x) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} f(z_{i-1}) - f(z_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i) D_i f(\bar{z}_i),$$

e assim

$$f(x) - f(c) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i) D_i f(c) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i) D_i f(\bar{z}_i) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i) D_i f(c) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)[D_i f(\bar{z}_i) - D_i f(c)]$$

que, sendo $D_i f$ definida numa vizinhança de c e contínua em c, pelo começo

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |Df_i(x) - Df_i(c)| < \epsilon$$

e finalmente

$$f(x) - f(c) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i) D_i f(c) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)[D_i f(\bar{z}_i) - D_i f(c)] < \epsilon n |x - c| < \epsilon n \delta.$$

$\square$

0.3 Exemplos de derivada

0.3.1 A derivada de $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Seja

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

então f é derivável em $c \in \mathring{A}$ sse existe

$$f'(c) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(c+t) - f(c)}{t}.$$

Perceba que, também nesse caso, a derivada é uma função linear:

$$f'(c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \to f'(c)t$$

tal que, fixado um $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $t < \delta$

$$|f(c+t) - f(c) - f'(c)t| < \epsilon t.$$

0.3.2 A derivada de $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

Seja agora

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m,$$

$$x \to f(x) = (f_1(x), .., f_m(x)).$$

Dado $c \in \mathring{A}$ temos que, se para cada $i \in [1, m]$ existe $f_i'(c)$, então

$$f_c' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

$$x \to x(f_1'(c), .., f_m'(c))$$

é a derivada de f. Quando f é considerada uma curva, o vetor $f'(c) = (f_1'(c), .., f_m'(c))$ é chamado de vetor tangente à f no ponto $f(c)$.

De fato, perceba que

$$f'(c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

$$h \to h(f_1'(c), .., f_m'(c))$$

é uma função linear e

$$|f(c+h)-f(c)-f_c'(h)| = |(f_1(c+h)-f(c)-f_1'(c)h), ..., (f_m(c+h)-f(c)-f_m'(c)h)| =$$

$$= |(f_1(c+h) - f(c) - f_1'(c)h)e_1 + ... + (f_m(c+h) - f(c) - f_m'(c)h)e_m| \leq$$

$$\leq |(f_1(c+h) - f(c) - f_1'(c)h)e_1| + ... + |(f_m(c+h) - f(c) - f_m'(c)h)e_m| =$$

$$= |f_1(c+h) - f(c) - f_1'(c)h| + .. + |f_m(c+h) - f(c) - f_m'(c)h|.$$

Assim, fixado $\epsilon/m > 0$, existe para cada $i = [1, m]$ $\delta_i > 0$ tal que

$$|h| < \delta_i \to |f_i(c+h) - f(c) - f_i'(c)h| < \epsilon/m|h|$$

e se $\delta = \min_i \delta_i$ obtemos

$$|h| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(c+h) - f(c) - f_c'(h)| < m \cdot \epsilon/m|h| = \epsilon|h|.$$

Por outro lado, se existir a derivada

$$f'(c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

$$x \to x(D_1(c), .., D_m(c)),$$

então para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|h| < \delta \Rightarrow |f(c+h) - f(c) - f_c'(h)| =$$

$$= |(f_1(c+h) - f(c) - D_1(c)h), ..., (f_m(c+h) - f(c) - D_m(c)h)| =$$

$$= |(f_1(c+h) - f(c) - D_1(c)h)e_1 + ... + (f_m(c+h) - f(c) - D_m(c)h)e_m| =$$

$$= \sqrt{\sum_i (f_1(c+h) - f(c) - D_1(c)h)^2} < \epsilon|h|,$$

e assim para cada i

$$|f_1(c+h) - f(c) - D_1(c)h| < \epsilon|h|,$$

e finalmente $f'_c(h) = D_i(c)$.

0.3.3 A derivada de $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

É conseguenza do Corolário que, se $f : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in \mathring{A}$, então toda derivada parcial $D_1 f(c), .., D_n f(c)$ existe e se $u = (u_1, .., u_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$Df(c)(u) = D_1 f(c) u_1 + .. + D_n f(c) u_n.$$

0.3.4 A derivada de $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Seja agora

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$x = (x_1, .., x_n) \to f(x) = (f_1(x_1, .., x_n), .., f_m(x_1, .., x_n)).$$

Se f é derivável em $c \in \mathring{A}$, então existe uma função linear

$$Df(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$h = (h_1, .., h_n) \to D_1(h_1, ..h_n), .., D_m(h_1, .., h_n))$$

tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|h| < \delta \Rightarrow |f(c+h) - f(c) - Df(c)(h)| =$$

$$|(f_1(c+h) - f(c) - D_1(c)h), ..., (f_m(c+h) - f(c) - D_m(c)h)| < \epsilon|h|.$$

Assim, para cada $i \in [1, m]$, existe uma função linear

$$D_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

tal que $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_i > 0$ tal que

$$|h| < \delta \Rightarrow |f_i(c+h) - f_i(c) - D_i(c)(h)| < \epsilon|h|.$$

Pelo Corolário, temos que, para todo $i \in [1, m]$ e $h = (h_1, .., h_n)$

$$D_i(c)(u) = D_1 f_i(c) h_1 + .. + D_n f_i(c) h_n,$$

assim que a derivada $Df(c)$ é a função linear com matrix

$$J_f(c) = \begin{bmatrix} D_1f_1(c) & D_2f_1(c) & .... & D_nf_1(c) \\ D_1f_2(c) & D_2f_2(c) & .... & D_nf_2(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1f_m(c) & D_2f_m(c) & .... & D_nf_m(c) \end{bmatrix}$$

Esta se chama de **matriz Jacobiana**. Quando $n = m$ o determinante dessa matriz chamase de **Jacobiano**.