Aula trinta e dois: Teorema da função inversa

Definição 0.1. *Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ diz-se $C^1(\Omega)$ quando todas as derivadas parciais de f existem contínuas em Ω.*

Temos visto que, se toda derivada parcial de uma função existem contínuas num ponto, então f **é diferenciável** naquel ponto. Assim, se $f \in C^1(\Omega)$ então f é diferenciável em Ω.

Teorema 0.2. *Se $f \in C^1(\Omega)$, então o diferencial*

$$Df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$$

$$x \to Df(x)$$

é continua coa norma uniforme

$$\|Df(x)\|_\infty = \sup_{u \in \mathbb{R}^n, |u|_n = 1} |Df(x)(u)|_q$$

Demonstração. Queremos demonstrar que, se $f \in C^1(\Omega)$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow \|Df(x) - Df(c)\|_\infty < \epsilon.$$

Lembramos o seguinte

Lemma 0.3.

Sendo que $Df(x) - Df(c) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ é uma função linear entre espaços de dimensão finita, temos que, para $u \in \Omega$:

$$|(Df(x) - Df(c))(u)| \le \sqrt{q} n M |u|, \ \ \textit{onde } M = \sup_{i,j} D_{i,j} f(x) - D_{i,j} f(c)$$

Demonstração. Sendo $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ função linear cuja matriz B é formada pelos $b_{i,j} = D_{i,j} f(x)$, e $Df(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ função linear cuja matriz C é formada pelos $c_{i,j} = D_{i,j} f(c)$, também a diferença

$$Df(x) - Df(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q,$$

é função linear que podemos então representar por meio da matriz A formada pelos $a_{i,j} = b_{i,j} - c_{i,j} = D_{i,j} f(x) - D_{i,j} f(c)$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & a_{q,3} & \dots & a_{q,n} \end{bmatrix}.$$

Assim, se $u = (u_1, .., u_n) \in \mathbb{R}^n$ temos

$$(Df(x) - Df(c))(u) = Au = \sum_{j=1}^{q} (\sum_{i=1}^{n} u_i a_{i,j}) e_j.$$

Seja

$$M = \sup_{i,j} a_{i,j} = \sup_{i,j} D_{i,j} f(x) - D_{i,j} f(c),$$

então, sendo $j \in [1, q]$

$$|[(Df(x) - Df(c))(u)]_j| = |y_j| = |\sum_{i=1}^{n} u_i a_{i,j}| \leq |u_1 a_{1,j}| + .. + |u_n a_{n,j}| \leq nM|u|.$$

Finalmente, de

$$|y| = \sqrt{\sum_{j=1}^{q} |y_j|^2},$$

obtemos, para $u \in \Omega$:

$$|(Df(x) - Df(c))(u)| \leq \sqrt{q} nM|u|$$

$\square$

Agora, sendo que para $u \in \Omega$:

$$|(Df(x) - Df(c))(u)| \leq \sqrt{q} nM|u|,$$

em particular

$$\|Df(x) - Df(c)\|_\infty = \sup_{u \in \mathbb{R}^n, |u|=1} |Df(x)(u) - Df(c)(u)| \leq \sqrt{q} nM|u| = \sqrt{q} nM.$$

Sendo $f \in C^1(\Omega)$, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow \forall i, j, \ |D_{i,j} f(x) - D_{i,j} f(c)| < \epsilon,$$

assim em particular

$$|x - c| < \delta \Rightarrow M = \sup_{i,j} D_{i,j} f(x) - D_{i,j} f(c) < \epsilon.$$

Juntando obtemos

$$|x - c| < \delta \Rightarrow \|Df(x) - Df(c)\|_\infty \leq \sqrt{q} nM \leq \sqrt{q} n\epsilon.$$

$\square$

Lemma 0.4. *Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ diferenciável em Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, $a, b \in \Omega$ e suponha que o segmento S unendo a com b também pertença a Ω. Então, por $x_0 \in \Omega$ temos*

$$|f(b) - f(a) - Df(x_0)(b-a)| \leq |b-a| \sup_{x \in S} |Df(x) - Df(x_0)|_\infty$$

Demonstração. Define

$$g : \Omega \to \mathbb{R}^q$$

$$x \to f(x) - Df(x_0)(x),$$

então

$$g(b) - g(a) = f(b) - Df(x_0)(b) - F(a) + Df(x_0)(a) = f(b) - f(a) - Df(x_0)(b-a).$$

Sendo $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ linear, $Df(x_0)' = Df(x_0)$, então por $x \in \Omega$ temos

$$Dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$$

$$u \to (Df(x) - Df(x_0))(u) = Df(x)(u) - Df(x_0)(u).$$

Pelo Teorema do valor médio, existe $c \in S$ tal que $|g(b) - g(a)| \leq |Dg(c)(b-a)|$, assim:

$$|f(b) - f(a) - Df(x_0)(b-a)| = |g(b) - g(a)| \leq$$

$$\leq |Dg(c)(b-a)| = |(Df(c) - Df(x_0))(b-a)| \leq$$

$$\leq \|Df(c) - Df(x_0)\|_\infty |b-a| \leq \sup_{x \in S} \|Df(x) - Df(x_0)\|_\infty |b-a|.$$

□

Este Lemma é bem útil para chegar ao próximo **Lemma de aproximação**:

Lemma 0.5. ***Lemma de aproximação***
Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, e $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ com $f \in C^1(\Omega)$. Se $x_0 \in \Omega$ então para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se x_1, $x_2 \in \overline{B}(x_0, \delta)$, então $x_1, x_2 \in \Omega$ e

$$|f(x_2) - f(x_1) - Df(x_0)(x_1 - x_2)| \leq \epsilon |x_1 - x_2|.$$

Demonstração. Sendo Ω aberto e $f \in C^1(\Omega)$, pelo Teorema 0.2 a derivada $Df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \mathbb{R}^q)$ é contínua, então para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \|Df(x) - Df(x_0)\|_\infty < \epsilon.$$

Se x_1, x_2 pertencem à bola fechada $\overline{B}(x_0, \delta)$ de centro x_0 e raio δ, sendo as bolas convexas o segmento S unendo x_1 e x_2 também pertence à bola, assim para todo $x \in S$ temos $|x - x_0| < \delta$ e então

$$\|Df(x) - Df(x_0)\|_\infty < \epsilon.$$

Assim, pelo lema anterior:

$$|f(x_2) - f(x_1) - Df(x_0)(x_1 - x_2)| \leq \sup_{x \in S} \|Df(x) - Df(x_0)\|_\infty |x_2 - x_1| < \epsilon |x_2 - x_1|.$$

□

0.0.1 O Teorema da função Inversa

Vamos primero demonstrar que, se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ é $f \in C^1(\Omega)$ e para $c \in \Omega$ temos

$$Df(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$$

injetiva, então existe uma vizinhança de c em Ω onde f é um homeomorphismo. Antes de chegar nisso, a próxima Proposição é bem útil:

Proposição 0.6. *A função linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ é injetiva sse existe $C > 0$ tal que, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ temos*

$$|L(u)| \geq C|u|.$$

Demonstração. Perceba primero que, se L é uma função linear pela qual existe $C > 0$ tal que, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ temos

$$|L(u)| \geq C|u|,$$

então se $L(x_1) = L(x_2)$ temos

$$0 = |L(x_2) - L(x_1)| = |L(x_2 - x_1)| \geq C|x_2 - x_1|,$$

assim $|x_2 - x_1| = 0$ que implica $x_2 = x_1$.

Por outro lado, uma função linear entre espaços de dimensão finita é contínua, pois possui $M > 0$ tal que, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ temos

$$|L(u)| \leq M|u|.$$

Se L é injetiva, então é bijetiva na sua imagem, então a função

$$L : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n)$$

é bijeção linear entre espaços de dimensão finita, então é invertível e sua inversa

$$L^{-1} : L(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

é função (bijeção) linear entre espaços de dimensão finita, então é contínua, então existe $K > 0$ tal que, para todo $w_1 = L(x_1) \in L(\mathbb{R}^n)$ temos

$$|L^{-1}(w_1)| \leq K|w_1| \Leftrightarrow |x_1| \leq K|L(x_1)| \Leftrightarrow 1/K|x_1| \leq |L(x_1)|.$$

$\square$

Teorema 0.7. ***Teorema da função injetiva***
Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ é $f \in C^1(\Omega)$, $c \in \Omega$ e

$$Df(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$$

injetiva. Então existe $\delta > 0$ tal que, a restrição

$$f_{|\overline{B}(c,\delta)} : \overline{B}(c, \delta) \to f(\overline{B}(c, \delta))$$

é um homeomorphismo.

Demonstração. Sendo $Df(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ injetiva, existe $C > 0$ tal que, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ temos $|Df(c)(u)| \geq C|u|$. Seja $\epsilon = C/2$, então pelo Lema de aproximação existe $\delta > 0$ tal que, se x_1, $x_2 \in \overline{B}(c, \delta)$, então

$$|f(x_2) - f(x_1) - Df(x_0)(x_1 - x_2)| \leq \epsilon|x_1 - x_2| = C/2|x_1 - x_2|.$$

Utilizando a desigualdade triangular ($|a - b| \geq ||a| - |b||$) temos

$$||f(x_2)-f(x_1)|-|Df(x_0)(x_1-x_2)|| \leq |f(x_2)-f(x_1)-Df(x_0)(x_1-x_2)| \leq C/2|x_1-x_2|,$$

e sendo $|Df(c)(x_1 - x_2)| \geq C|(x_1 - x_2)|$, obtemos

$$|f(x_2) - f(x_1)| \geq C/2|x_1 - x_2|,$$

assim que f é injetiva, pois se $f(x_1) = f(x_2)$ temos

$$0 = |f(x_2) - f(x_1)| \geq C/2|x_2 - x_1|$$

assim $|x_2 - x_1| = 0$ que implica $x_2 = x_1$.

Finalmente, observe que $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ é uma função contínua injetiva no compacto $\overline{B}(c, \delta)$, então $_{|\overline{B}(c,\delta)} : \overline{B}(c, \delta) \to f(\overline{B}(c, \delta))$ é homeomorphismo. $\square$

Observação: Se $n < q$, temos que $f(c)$ podaría não ser ponto interior de $f(\overline{B}(c, \delta))$ (de fato, $f(\overline{B}(c, \delta))$ podaría ter interior vazío em $\mathbb{R}^q$).