

Lista 1

1. Sejam m e n naturais, $\|\cdot\|_M$ e $\|\cdot\|_N$ normas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Mostre que as seguintes funções $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ definem normas em $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ para $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$:

$$(a) \|(x, y)\| = \sqrt{(\|x\|_M)^2 + (\|y\|_N)^2}$$

$$(b) \|(x, y)\| = \|x\|_M + \|y\|_N$$

$$(c) \|(x, y)\| = \max\{\|x\|_M, \|y\|_N\}$$

2. Seja $p > 0$ um número real positivo. Em $\mathbb{R}^2$, faça um desenho dos seguintes conjuntos sobrepostos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p} = 1\} \text{ com } p = 1, 2, 3, \dots \text{ (e para outros valores de } p \text{ se quiser) e}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

3. Sejam n natural, $p > 0$ um número real positivo e $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_p = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

$$(a) \text{ Mostre que } \|x\|_p \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

$$(b) \text{ Mostre que } \|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n;$$

$$(c) \text{ Mostre que } \|\lambda \cdot x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

$$(d) \text{ Para } n \geq 2 \text{ e } p \in]0, 1[, \text{ dê exemplos de vetores } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ tais que } \|x + y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p. \text{ Conclua que } \|\cdot\|_p \text{ não é uma norma para } 0 < p < 1.$$

$$(e) \text{ O objetivo deste item é mostrar que a desigualdade triangular vale para } p \geq 1:$$

- Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Suponha que a derivada f' seja crescente, ou seja $f'(x) \leq f'(y)$ para $x, y \in I$ com $x \leq y$. Mostre que a função f é convexa, ou seja, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$, para todos $x, y \in I, t \in [0, 1]$;
- Usando o item anterior, concluímos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ é uma função convexa. Usando esse fato, mostre que vale a desigualdade entre as médias (ponderadas) aritmética e geométrica, isto é, mostre que dados $a, b \geq 0$ e dados "pesos" $\alpha, \beta > 0$ com $\alpha + \beta = 1$, então $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$;
- Dado $p > 1$, defina $q > 1$ de modo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. O número q é chamado expoente conjugado de p . Usando o item anterior, mostre que vale a "Desigualdade de Young": $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ para quaisquer $a, b \geq 0$;
- Mostre que vale a "Desigualdade de Hölder": $\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, onde $p > 1$ e $q > 1$ são expoentes conjugados;
- Mostre que vale a "Desigualdade de Minkowski": $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $p > 1$;
- Conclua que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$ para $p \geq 1$.

4. Prove que toda norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}$ é da forma $\|x\| = a \cdot |x|$ onde $a > 0$ é uma constante e $|x|$ é o valor absoluto de x . Conclua que toda norma em $\mathbb{R}$ provém de um produto interno, isto é, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, para algum produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}$.

5. Mostre que uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ provém de um produto interno se, e somente se, vale a "Lei do paralelogramo": $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Conclua que existem normas em $\mathbb{R}^n$ que não provêm de um produto interno.

6. Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $d(x, x) = 0, \forall x \in M$;
- $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$;
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$;

- (a) Se $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$, mostre que $d(x, y) = \|x - y\|$ define uma métrica em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a métrica d provém da norma $\|\cdot\|$.
- (b) Mostre que para uma métrica em $\mathbb{R}^n$ ser proveniente de uma norma, é necessário e suficiente que $d(x + a, y + a) = d(x, y)$ e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$ para todos $x, y, a \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Sejam $n \in \mathbb{N}$, X um conjunto não-vazio qualquer e $\|\cdot\|$ uma norma sobre o $\mathbb{R}^n$.

- (a) Seja $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções de X em $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial real;
- (b) Seja $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}^n$, isto é, o conjunto das funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que existe $c > 0$ com $\|f(x)\| \leq c, \forall x \in X$. Mostre que $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}^n)$;
- (c) Mostre que $\|\cdot\|_B : \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|f\|_B = \sup\{\|f(x)\|; x \in X\}$ é uma norma em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$.