CÁLCULO V / CÁLCULO DIFERENCIAL - MAT0311 / MAP0217

2017

Lista 2

1. Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. Mostre que $\overline{X} = M \setminus \text{int}(M \setminus X)$ e $\text{int}(X) = M \setminus (\overline{M \setminus X})$.

2. Seja (M,d) um espaço métrico e $A \subseteq M$. Mostre que são equivalentes:

(a) Existe $c > 0$ tal que $d(x,y) \leq c, \forall x,y \in A$;

(b) Para todo $x \in M$, existe $r > 0$ tal que $A \subseteq B(x,r)$;

(c) Existem $x \in M$ e $r > 0$ tal que $A \subseteq B(x,r)$.

3. Mostre que a fronteira de um conjunto aberto tem interior vazio.

4. Mostre que existem um espaço métrico M e $X \subseteq M$ tal que $\text{int}(X) = \text{int}(M \setminus X) = \emptyset$. Mostre que, neste caso, as fronteiras de X e de $M \setminus X$ são o espaço todo.

5. Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que $X \subset M$ é denso em M se $\overline{X} = M$. Mostre que:

(a) $\{r.x | r \in \mathbb{Q}\}$ é denso em $\mathbb{R}$ para todo x irracional;

(b) $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Sejam X um conjunto qualquer, (M,d_M) um espaço métrico e $\mathscr{B}(X,M)$ o conjunto das funções limitadas de X em M. Mostre que, dadas $f,g \in \mathscr{B}(X,M)$, o conjunto $\{d_M(f(x),g(x)); x \in X\}$ é limitado e, portanto, $d\colon \mathscr{B}(X,M) \times \mathscr{B}(X,M) \to \mathbb{R}$ dada por $d(f,g) = \sup\{d_M(f(x),g(x)); x \in X\}$ está bem definida. Mostre que $(\mathscr{B}(X,M),d)$ é um espaço métrico.

7. Seja (M,d) um espaço métrico. Mostre que se $A, B \subseteq M$ são compactos, então $A \cup B$ é compacto.

8. Dê exemplos de conjuntos limitados e conjuntos fechados que não sejam compactos, exibindo em cada caso coberturas por abertos que não possuem subcoberturas finitas.

9. Sejam (M,d) um espaço métrico, $K \subseteq M$ um subconjunto compacto de M e $F \subseteq K$ um subconjunto fechado de M. Mostre que F é compacto.

10. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Se para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $K \cap X$ é compacto, prove que X é fechado.