CÁLCULO V / CÁLCULO DIFERENCIAL - MAT0311 / MAP0217

2017

Lista 3

1. Sejam (M,d) um espaço métrico. Dados $a \in M$ e $X \subseteq M$, mostre que são equivalentes:

(a) a é ponto de acumulação de X;

(b) para qualquer $r > 0$, $B_r(x) \cap X$ é infinito.

2. Sejam (M,d) um espaço métrico, $a \in M$ e $X,Y \subseteq M$ não-vazios. Definimos o diâmetro de X como $diam(X) = sup\{d(x_1,x_2); x_1,x_2 \in X\}$, a distância de a a X como $d(a,X) = inf\{d(a,x); x \in X\}$ e a distância de X a Y como $d(X,Y) = inf\{d(x,y); x \in X, y \in Y\}$.

(a) Sejam $(\mathbb{C},d)$ o corpo dos números complexos munido da métrica euclidiana e $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Calcule $diam(D)$ e $d(4i,D)$.

(b) Considere o espaço métrico $\mathbb{R}^3$ munido da métrica euclidiana e $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$. Calcule $diam(B)$ e $d((5,0,0),B)$. Ache $d((a,b,c),B)$ para $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qualquer.

3. Calcule o interior, o fecho, a acumulação e a fronteira de X contido no espaço métrico M em cada caso. Diga se X é aberto, se é fechado, se é compacto, se é completo e se é conexo.

(a) $X = \emptyset$ e M qualquer;

(b) $X =]0,1[$ e $M = \mathbb{R}$ com a métrica euclidiana;

(c) $X =]0,1]$ e $M = \mathbb{R}$ com a métrica euclidiana;

(d) $X = [0,1]$ e $M = \mathbb{R}$ com a métrica euclidiana;

(e) $X =]0,1[\cup]1,2[$ e $M = \mathbb{R}$ com a métrica euclidiana;

(f) $X = \mathbb{Q}$ e $M = \mathbb{R}$ com a métrica euclidiana;

(g) $X = \mathbb{Q}^2$ e $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana;

4. Seja (M,d) um espaço métrico. Dado $X \subset M$, definimos $X_* = \{a \in M | d(a,X) = 0\}$. Mostre que $X_* = \overline{X}, \forall X \subset M$.

5. Prove ou dê contraexemplo: Se (M,d) é um espaço métrico e F,G são fechados de M com $d(F,G) = 0$, então $F \cap G \neq \emptyset$.

6. Mostre que todo espaço métrico (M,d) admite uma métrica d' que é equivalente a d e torna M limitado.

7. Dizemos que um espaço X é **totalmente desconexo** se os únicos conexos não-vazios de X são os conjuntos unitários. Mostre que:

(a) todo espaço com a métrica discreta é totalmente desconexo;

(b) $\mathbb{Q}$ é um subespaço totalmente desconexo de $\mathbb{R}$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ uma função. Mostre que f é contínua se, e somente se, f é constante.

9. Sejam (M,d) um espaço métrico e duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M, ambas convergindo para $a \in M$. Mostre que a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $z_{2n} = x_n$ e $z_{2n-1} = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, também é uma sequência convergente para a.

10. Sejam (M,d) um espaço métrico e duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M convergentes para $x \in M$ e $y \in M$, respectivamente. Mostre que:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y) = d(x, y)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

11. Mostre que a sequência $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui alguma subsequência convergente.

12. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em um espaço métrico (M,d) convergindo para um ponto $a \in M$, mostre que $A = \{a\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subespaço fechado de X.

13. Seja (M,d) um espaço métrico e sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

(a) (x_n) é de Cauchy se, e somente se, (y_n) é de Cauchy.

(b) Dado $x \in M$, $\lim x_n = x$ se, e somente se, $\lim y_n = x$.