

Lista 4

1. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Seja $f: M \rightarrow N$ uma isometria, isto é, f é uma função sobrejetora tal que $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$. Mostre que:
 - (a) f é injetora;
 - (b) f^{-1} também é uma isometria;
 - (c) f é contínua.
2. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, $A \subseteq M$ e $f: M \rightarrow N$. Prove ou dê um contra-exemplo.
 - (a) Se $f: M \rightarrow N$ é contínua em todo ponto de A , então $f|_A: A \rightarrow N$ é uma função contínua.
 - (b) Se $f|_A: A \rightarrow N$ é uma função contínua, então $f: M \rightarrow N$ é contínua em todo ponto de A .
3. Seja (K, d_K) um espaço métrico compacto. Considere o conjunto $\mathcal{C}(K)$ de todas as funções contínuas de K em $\mathbb{R}$, considerando $\mathbb{R}$ munido da métrica usual. Mostre que a função $d: \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K\}$, para $f, g \in \mathcal{C}(K)$, é uma métrica sobre $\mathcal{C}(K)$. Mostre que $(\mathcal{C}(K), d)$ é um espaço métrico completo não-limitado.
4. Considere $C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ munido da métrica usual induzida por $\mathbb{R}$ e (M, d) um espaço métrico. Mostre que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M é convergente para um ponto $a \in M$ se, e somente se, a função $f: C \rightarrow M$, definida por $f(\frac{1}{n}) = x_n$ e $f(0) = a$, é contínua.
5. Sejam (M, d_M) um espaço métrico, $\phi: M \rightarrow M$ contínua e uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_0 \in M$ qualquer e $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Mostre que, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $a \in M$, então a é um ponto fixo de ϕ , isto é, $\phi(a) = a$.
6. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f, g: M \rightarrow N$ funções contínuas. Se $f(a) \neq g(a)$, para algum $a \in M$, mostre que existe uma bola $B = B_\epsilon(a)$ tal que $f(x) \neq g(y)$, para quaisquer $x, y \in B$.
7. Considere (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f: M \rightarrow N$ uma função contínua. Mostre que o gráfico de f — ou seja, o conjunto $\{(x, f(x)) : x \in M\}$ — é fechado em $M \times N$ com a métrica $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_M(x_1, x_2), d_N(y_1, y_2)\}$.
8. Prove que se $f: M \rightarrow N$ é uniformemente contínua, então f transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy. Mostre que a hipótese de que f é uniformemente contínua não pode ser enfraquecida para “ f é contínua”.