

Lista 5

1. Marque V para verdadeiro e F para falso, justificando quando verdadeiro e dando contraexemplo quando falso.

- () Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ é uma função contínua, então f é constante;
- () Existe uma bijeção contínua $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$;
- () Se X e Y são subespaços completos de um espaço métrico M , então $X \cap Y$ é completo e $X \cup Y$ é completo;
- () Todo conjunto não-vazio com a métrica discreta é completo;
- () Os espaços $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não são completos;
- () Existem espaços métricos que não são homeomorfos, mas seus completamentos são homeomorfos;
- () Existem espaços métricos homeomorfos, cujos completamentos não são homeomorfos;
- () Todo espaço métrico discreto e compacto é finito;
- () Se (M, d_M) e (N, d_N) são espaços métricos, $A, B \subseteq M$ são tais que $d_M(A, B) = 0$ e $f: M \rightarrow N$ é contínua, então $d_N(f[A], f[B]) = 0$;
- () Funções reais contínuas levam intervalos limitados em intervalos limitados;
- () Funções reais contínuas levam intervalos abertos em intervalos abertos;
- () Funções reais contínuas levam intervalos fechados em intervalos fechados;
- () Todas as bolas abertas em espaços normados são homeomorfas;
- () Toda função contínua em um compacto é Lipschitziana;
- () Se $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio e $c \in \mathbb{R}$, então $\{x \in \mathbb{R}^n; p(x) < c\}$ é aberto em $\mathbb{R}^n$;
- () Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\alpha \leq \beta$, então $\{x \in \mathbb{R}^n; \alpha \leq f(x) \leq \beta\}$ é fechado em $\mathbb{R}^n$;
- () Toda norma em $\mathbb{R}^n$ é contínua;
- () Se uma sequência de aplicações uniformemente contínuas $f_n: M \rightarrow N$ converge uniformemente para $f: M \rightarrow N$, então f é uniformemente contínua;
- () Se $\phi: M \rightarrow N$ é uniformemente contínua e a sequência de aplicações $f_n: X \rightarrow M$ converge uniformemente para $f: X \rightarrow M$, então as aplicações $\phi \circ f_n: X \rightarrow N$ convergem uniformemente para $\phi \circ f: X \rightarrow N$;
- () Se (M, d) é um espaço métrico, então $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ e $d_2(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ são métricas limitadas e equivalentes a d .
- () Se E, F são espaços normados, então toda função $L: E \rightarrow F$ linear é contínua;
- () $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(1/x)$ é uma função contínua e limitada;
- () $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é uma função contínua;
- () $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{|x|}$ é uma função uniformemente contínua;
- () Se $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas, então $f \cdot g: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua;
- () Se $f, g: M \rightarrow E$ são uniformemente contínuas, então $f + g: M \rightarrow E$ é uniformemente contínua;
- () Se $F, G \subseteq \mathbb{R}^n$ são conjuntos fechados, então $F + G$ também é fechado;
- () Se $f: M \rightarrow N$ e $X \subset M$ é tal que $\overline{X} = M$, então $\overline{f(X)} = \overline{f(M)}$;

2. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Dada uma função $f: M \rightarrow N$, mostre que são equivalentes:
- (a) f é contínua;
 - (b) $f^{-1}[F]$ é fechado, para todo subconjunto fechado $F \subseteq N$;
 - (c) $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$, para todo $A \subseteq M$.
 - (d) $f^{-1}[\text{int}(B)] \subseteq \text{int}(f^{-1}[B])$, para todo $B \subseteq N$.
3. Sejam (M, d) um espaço métrico e $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in M$. Se $f(a) < g(a)$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in M, d(x, a) < \delta, d(y, a) < \delta \Rightarrow f(x) < g(y)$.
4. Dada uma função real contínua $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, considere o aberto $A = \{x \in M; f(x) > 0\}$. Mostre que, para todo $x \in \partial A$, tem-se $f(x) = 0$. Dê exemplo em que se tenha $f(x) = 0$ com $x \notin \partial A$.
5. Seja $\chi_A: M \rightarrow \mathbb{R}$ a função característica de um subconjunto $A \subseteq M$ ($\chi_A(x) = 1$, se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$, caso contrário). Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ_A é a fronteira de A em M .
6. Sejam K um espaço compacto e $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(x) > 0$ para todo $x \in K$, mostre que existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in K$. Mostre que a hipótese de que K é compacto é necessária.
7. As sequências de funções $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas abaixo convergem pontualmente para alguma função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$? Em caso afirmativo, elas convergem uniformemente para f ?
- (a) $f_n(x) = x^n$;
 - (b) $f_n(x) = \frac{x}{n}$;
 - (c) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$;
 - (d) $f_n(x) = nx(1-x)^n$;
8. As seguintes funções $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em quais pontos de $\mathbb{R}^2$? Existem pontos onde a função f é descontínua, mas é contínua separadamente em relação a cada variável?
- (a) $f = \chi_{\mathbb{Q}^2}$;
 - (b) $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$;
 - (c) $f(x, y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$;
 - (d) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (y-x)^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$;
 - (e) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$;
 - (f) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^3 - y^2}$, se $x^3 \neq y^2$ e $f(x, y) = 0$, caso contrário;
 - (g) $f(x, y) = (x-y)^2 \sin\left(\frac{1}{x-y}\right)$, se $x \neq y$ e $f(x, y) = 0$, caso contrário.
9. Sejam I um intervalo da reta e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que $f(I)$ é um intervalo fechado e limitado se I for um intervalo fechado e limitado. Dê exemplos onde todos os demais tipos de intervalos da reta tenham imagens contínuas que sejam intervalos de tipo diferente do domínio.
10. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Se $A, B \subseteq M$ são tais que $d(A, B) = 0$ e $f: M \rightarrow N$ é uniformemente contínua, então $d(f[A], f[B]) = 0$.
11. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Se uma aplicação linear $f: E \rightarrow F$ for descontínua, então f é descontínua em todos os pontos de E .
12. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Prove que $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|_F; x \in E, \|x\|_E = 1\}$ define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$, o espaço vetorial das funções lineares contínuas de E em F .

13. Sejam (M, d) um espaço métrico, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função e $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, suas funções coordenadas (isto é, as composições de f com as projeções de $\mathbb{R}^n$), considerando $\mathbb{R}^n$ com alguma das normas equivalentes conhecidas e $\mathbb{R}$ com sua norma usual.
- (a) f é uniformemente contínua se, e somente se, f_i é uniformemente contínua, para todo $i = 1, \dots, n$;
- (b) f é Lipschitziana se, e somente se, f_i é Lipschitziana, para todo $i = 1, \dots, n$;
14. Mostre que, se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo limitado, (M, d_M) é um espaço métrico e $f: I \rightarrow M$ é uma função uniformemente contínua, então f é limitada.
15. Dados os espaços métricos M e N , seja $v: \mathcal{B}(M, N) \times M \rightarrow N$ definida por $v(f, x) = f(x)$. Mostre que v é contínua no ponto $(f_0, x_0) \in \mathcal{B}(M, N) \times M$ se, e somente se, $f_0: M \rightarrow N$ é contínua no ponto $x_0 \in M$.
16. Sejam $X \neq \emptyset$ e (M, d_M) um espaço métrico não-vazio. Sabemos que o conjunto $\mathcal{B}(X, M)$ das funções limitadas de X em M é um espaço métrico com a métrica $d(f, g) = \sup\{d_M(f(x), g(x)); x \in X\}$. Sendo $\mathcal{F}(X, M)$ o conjunto de todas as funções de X em M , temos que $(\mathcal{F}(X, M), d)$ pode não ser um espaço métrico, pois o conjunto $\{d_M(f(x), g(x)); x \in X\}$ pode ser ilimitado em $\mathbb{R}$. Seja $\sim$ a relação binária em $\mathcal{F}(X, M)$ tal que $f \sim g$ se $\{d_M(f(x), g(x)); x \in X\}$ for limitado em $\mathbb{R}$.
- (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}(X, M)$ e que $\mathcal{B}(X, M)$ é uma das classes de equivalência determinada por $\sim$;
- (b) Mostre que a restrição de d a qualquer uma das classes de equivalência determinadas por $\sim$ é uma métrica;
- (c) Dada $f \in \mathcal{F}(X, M)$, denote por $\mathcal{F}_f(X, M)$ a classe de equivalência de f determinada por $\sim$. Dada uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}(X, M)$, mostre que esta converge uniformemente para f se, e somente se, (i) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_n \in \mathcal{F}_f(X, M), \forall n \geq n_0$; e (ii) a sequência $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge para f no espaço métrico $(\mathcal{F}_f(X, M), d)$.