CÁLCULO V / CÁLCULO DIFERENCIAL - MAT0311 / MAP0217

2017

Lista 6

1. Sobre as seguintes funções $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pergunta-se:

(a) Existem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?

(b) Para quais $u \in \mathbb{R}^2$, existe $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$?

(c) f é diferenciável em $(0,0)$?

(d) f é contínua em $(0,0)$?

- $f = \chi_{\mathbb{Q}^2}$;
- $f(x,y) = sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;
- $f(x,y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;
- $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;
- $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;
- $f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;
- $f(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;
- $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^3-y^2}$, se $x^3 \neq y^2$ e $f(x,y) = 0$, caso contrário;
- $f(x,y) = (x-y)^2 sin\left(\frac{1}{x-y}\right)$, se $x \neq y$ e $f(x,y) = 0$, caso contrário.

2. Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $F(x,y) = f(x+2y) + f(y)$.

(a) Calcule $\frac{\partial F}{\partial(h,k)}(x_0,y_0)$, a derivada direcional de F em (x_0,y_0) na direção (h,k).

(b) Mostre que F é diferenciável em (x_0,y_0). Explicite a matriz $F'(x_0,y_0)$.

(c) Calcule $dF(x_0,y_0)((1,1),(1,0))$ para $f(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2$.

(d) Calcule $dF(x_0,y_0)(x_0,2x_0)$ para $f(x_1) = -6x_1$ e $x_0 = 1$.

3. Calcule:

(a) Seja $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x,y,z) = (x^2+y-z, xyz^2, 2xy-y^2z)$. Encontre $f'(x_0,y_0,z_0)$.

(b) Seja $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $h(u,v) = (cos(u)cos(v), cos(u)sin(v), sin(v))$. Encontre $h'(u_0,v_0)$.

(c) Seja $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $g(r,\theta,z) = (rcos(\theta), rsin(\theta), z)$. Encontre $g'(r_0,\theta_0,z_0)$.

4. Calcule:

(a) Sejam $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (x+y, x-y)$, $g(u,v) = (uv, u+v)$ e $h = g \circ f$. Encontre $h'(x_0,y_0)$.

(b) Seja $f(u_1,u_2,u_3) = (y_1(u_1,u_2,u_3), y_2(u_1,u_2,u_3)) = (u_1u_2 - u_1u_3, u_1u_3 + u_2^2)$ e $g(x_1,x_2) =$
$= (u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2), u_3(x_1,x_2)) = (x_1cos(x_2) + (x_1-x_2)^2, x_1sin(x_2) + x_1x_2, x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$.
Encontre $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(1,0)$, $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}(1,0)$, $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}(1,0)$ e $\frac{\partial y_2}{\partial x_2}(1,0)$.

5. Dadas $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, calcule:

(a) O polinômio de Taylor $P_x: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de ordem 1 de f no ponto $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, explicitando $P_x(h_1,...,h_n)$.

(b) A equação do hiperplano $H_x \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ com $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- $f(x) = k + ax$;
- $f(x) = k + ax + bx^2$;
- $f(x) = k + a_1x^1 + ... + a_nx^n$;
- $f(x) = e^x$;
- $f(x,y) = k + ax + by$;
- $f(x,y) = k + ax + by + cx^2 + dy^2 + exy$;
- $f(x,y) = cos(x)sin(y)$;
- $f(x,y) = xcos(y) + (x-y)^2$;
- $f(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;
- $f(x,y,z) = x^2 + y - z$;
- $f(x,y,z) = xyz^2$;
- $f(x,y,z) = 2xy - y^2z$;
- $f(x_1,...,x_n) = k + a_1x_1 + ... + a_nx_n$;
- $f(x_1,...,x_n) = p(x_1,...,x_n)$, onde p é um polinômio, em $x = (0,...,0)$;

6. Mostre que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$ é de classe $\mathscr{C}^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

7. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo p e $f: U \to \mathbb{R}^k$ diferenciável em p. Existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{||h||}$?

8. Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ e $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, se $x \neq y$, e $F(x,x) = f'(x)$. Mostre que F é diferenciável em (x,y) se $x \neq y$. Mostre que, se existir $f''(x)$, então F é diferenciável em (x,x).

9. Sejam $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$, e $f(0,0) = 0$, e $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \neq \nabla f(0,0).u$. Por quê isso acontece?

10. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$, e $f(0,0) = 0$. Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$, mas $f \circ \gamma$ é diferenciável em 0, para toda curva $\gamma:]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}^2$ diferenciável em 0 com $\gamma(0) = (0,0)$.

11. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Mostre que, se A é aberto e convexo, e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$, para todo $(a,b) \in A$, então $f(x,y) = g(x)$ em A.

(b) Mostre que, se A é aberto e convexo, e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$, para todo $(a,b) \in A$, então f é constante.

(c) Mostre que, se $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0); x \geq 0\}$, e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$, para todo $(a,b) \in A$, então f é constante.

(d) Para $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0); x \geq 0\}$, encontre f tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$, para todo $(a,b) \in A$, mas f não é independente de y.

12. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $f: A \to \mathbb{R}^k$ uma função diferenciável. Mostre que, se $df(x) = 0$, para todo $x \in A$, então f é constante.
(Sugestão: Trate primeiro o caso em que A é convexo. Para o caso geral, mostre que, dado $c \in \mathbb{R}^k$, o conjunto $f^{-1}(c)$ é aberto e fechado relativamente a A, lembrando que todo ponto de A tem uma bola aberta como vizinhança convexa.)

13. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $f: A \to \mathbb{R}^k$ tal que $||f(x) - f(y)|| \leq ||x-y||^\alpha$, com $\alpha > 1$. Mostre que f é constante.

14. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f: A \to \mathbb{R}$ diferenciável em um ponto p interior a U. Mostre que, se p é um ponto de máximo ou de mínimo local de f, então $df(p) = 0$.

15. Mostre que, se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem derivadas parciais limitadas, então f é contínua.