

Prova optativa

A prova é sobre 8 pontos (logo a nota será multiplicada por 1.25)

Questão 1, 2.5 pontos

A equação

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \cos(z)$$

pode ser resolvida de forma única para y em termos de x, z numa vizinhança de $(0, 1, 0)$? Em outras palavras, existe vizinhanças U de $(0, 0)$ em $\mathbb{R}^2$ e V de 1 em $\mathbb{R}$ e uma função

$$\phi : U \rightarrow V$$

$$(x, z) \mapsto y = \phi(x, z)$$

tal que para todo $(x, z) \in U$, temos

$$\sqrt{x^2 + \phi(x, z)^2 + z^2} = \cos(z)?$$

Justifica a resposta.

Questão 2, 2.5 pontos

Seja U aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $f \in C^1(U)$. Dado $c \in \mathbb{R}^n$ mostre que se $x \in U$ é um ponto de acumulação para $f^{-1}(c)$, então $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não é uma bijeção.

Questão 3, 3 pontos Justifica ou dá controexemplos.

- Se a resposta é correta e justificada, +1.5.
 - Se a resposta é correta sem justificação, ou com justificação errada +0.5.
 - Se a resposta é errada, -0.5.
1. A imagem contínua de um aberto é aberta (isso é, se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e $A \subseteq X$ é aberto, $f(A)$ é aberto).
 2. A função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^3 + x, y^3 + \sin(y))$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.