

Primeira Prova

Dia: 25 de setembro de 2017

Questão 1, 3 pontos

Demonstra o teorema das interseções de Cantor: Seja $F_1 \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$, e seja

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$$

uma sequência encaixada de conjuntos fechados e não vazios. Então existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$a \in \bigcap_i F_i$$

Demonstração. • Sendo, para todo i , F_i fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$, pelo Teorema de Hein-Borel é compacto.

- Sendo F_i fechado para cada i , então os complementares $G_i = \mathbb{R}^n \setminus F_i$ é aberto para todo i .
- Assumimos que não existe um ponto em común a todo F_i . Então

$$\mathbb{R}^n \subseteq \bigcup_i G_i,$$

e em particular a família G_i é uma cobertura aberta para F_1 .

- Sendo F_1 compacto, temos

$$F_1 \subset G_1 \cup \dots \cup G_k,$$

e sendo

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_k \supseteq \dots$$

temos

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_k \subseteq \dots,$$

assim que

$$F_1 \subset G_1 \cup \dots \cup G_k = G_k.$$

- Sendo que $F_1 \subseteq G_k$, e $G_k = \mathbb{R}^n \setminus F_k$, obtemos $F_1 \cap F_k = \emptyset$.

- Sendo $F_k \subseteq F_1$, obtemos que $F_1 \cap F_k = F_k = \emptyset$, contradição.

□

Questão 2, 2 pontos

Um espaço topológico (X, τ) diz-se de Hausdorff quando todos $x \neq y \in X$ possuem vizinhanças disjuntas: $\forall x, y$ com $x \neq y$, existem U_x, U_y tal que $x \in U_x \subset X, y \in U_y \subset X$, e $U_x \cap U_y = \emptyset$. Equivalentemente existem $A_x, A_y \subset \tau$ tal que $x \in A_x, y \in A_y$ e $A_x \cap A_y = \emptyset$.

Demonstra que todo espaço métrico é de Hausdorff, isso é, se (X, d) é um espaço métrico, e $\tau = \tau_d$ a topologia induzida, (X, τ) é espaço de Hausdorff.

Demonstração. Um espaço métrico é, por definição, um conjunto M com uma métrica d , isso é, com uma função:

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$n, m \rightarrow d(n, m)$$

tal que, para todo $n, m, p, \in M$:

1. $d(n, m) \geq 0$, e $d(n, m) = 0$ sse $m = n$,
2. $d(n, m) = d(m, n)$,
3. $d(n, m) \leq d(n, p) + d(p, m)$.

Sejam $m, n \in M$ com $m \neq n$, vamos construir bolas abertas centradas em m e n respectivamente, e disjuntas.

- Sendo $m \neq n$, temos que $d(m, n) > 0$, e em particular existe $a \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $d(m, n) = a$.
- Então por construção as bolas $B_{(m, a/2)}$ e $B_{(n, a/2)}$ são abertos disjuntos contendo m e n respectivamente.

□

Questão 3, 2.5 pontos

Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológico, $f : X \rightarrow Y$ contínua e $K \subset X$ compacto em (X, τ_1) . Demonstra que $f(K)$ é compacto em (Y, τ_2) , isso é: a imagem contínua de um compacto é compacta.

Lembra que, se $A \in Y$, definimos a preimagem como $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$. Temos que, para $A \subset Y$, $ff^{-1}(A) \subseteq A$, e para $B \subset X$, $B \subseteq f^{-1}f(B)$. Também, se A_i são conjuntos de Y , temos que $f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$, e se $B_i \subset X$ temos $f(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f(B_i)$

Demonstração. Seja $\bigcup_i U_i$ uma cobertura aberta de $f(K)$, queremos achar uma subcobertura finita.

- Temos que $\bigcup_i U_i f^{-1}(U_i)$ é uma cobertura aberta de K .
- Sendo K compacto, tem uma subcobertura finita, isso é:

$$K \subseteq f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup \dots \cup f^{-1}(U_n).$$

- Então obtemos

$$f(K) \subset ff^{-1}(U_1) \cup ff^{-1}(U_2) \cup \dots \cup ff^{-1}(U_n) \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$$

- Assim K é compacto.

□

Questão 4, 2.5 pontos

Sejam X um conjunto não vazio e d_1 e d_2 duas métricas sobre X . Demonstre que são equivalentes:

1. d_1 e d_2 são equivalentes;
2. (X, d_1) e (X, d_2) tem as mesmas sequências convergentes.

Demonstração. Por definição, duas métricas d_1 e d_2 sobre X são equivalentes quando definem os mesmos abertos de X . Por outro lado, uma sequência (x_n) em (X, d) é convergente para $x \in X$ quando para toda vizinhança U de x em (X, d) existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ temos $x_n \in U$. Sendo uma vizinhança de x em X um conjunto contendo um aberto contendo x , podemos reformular dizendo que (x_n) converge para x em (X, d) quando para todo aberto V contendo x existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ temos $x_n \in V$.

Sejam d_1 e d_2 métricas equivalentes num conjunto X , vamos ver que (X, d_1) e (X, d_2) tem as mesmas sequências convergentes. Isso é, seja (x_n) uma sequência de pontos de X convergendo em (X, d_1) para $x \in X$, quero ver que também é convergente em (X, d_2) .

- Seja V aberto de (X, d_2) contendo x , então V é aberto em (X, d_1) , pois d_1 e d_2 são equivalentes.
- Sendo (x_n) convergente em (X, d_1) existe um n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in V$. Então (x_n) é convergente em (X, d_2) .
- Repetendo o raciocínio, se (y_n) é sequência convergente em (X, d_2) , também é convergente em (X, d_1) .

Sejam agora (X, d_1) e (X, d_2) espaços métricos tendo as mesmas sequências convergentes, vamos ver que d_1 e d_2 são equivalentes. Isso é, seja U aberto de (X, d_1) , quero ver que também é aberto em (X, d_2) .

- Vemos primeiro que os limites são iguais: seja (x_n) uma sequência convergendo em (X, d_1) to p e em (X, d_2) to q :
 1. (x_n) converge em (X, d_1) para p , então também a sequência $(y_n) = (x_1, p, x_2, p, x_3, p, \dots)$ converge em (X, d_1) para p .
 2. Então (y_n) converge em (X, d_2) .
 3. Sendo a subsequência $(y_{2n}) \equiv p$, em quanto a subsequência (y_{2n+1}) coincide coa sequência (x_n) e converge para q , obtemos $p = q$.
- Sendo U aberto de (X, d_1) , então $F = X \setminus U$ é fechado em (X, d_1) .
- Então toda sequência (x_n) de pontos de F convergente em (X, d_1) tem limite em F (pois F é fechado em (X, d_1) sse toda sequência convergente tem limite em F).
- Assim toda sequência (x_n) de pontos de F convergente em (X, d_2) tem limite em F (pois (X, d_1) e (X, d_2) tem as mesmas sequências convergentes).
- Então F é fechado em (X, d_2) (pois F é fechado em (X, d_2) sse toda sequência convergente tem limite em F), e $U = X \setminus F$ é aberto em (X, d_2) .
- Repetindo o raciocínio, obtemos que se U é aberto em (X, d_2) , $F = X \setminus U$ é fechado em (X, d_2) , então é fechado em (X, d_1) , então U é aberto em (X, d_1) , e acabamos.

□