CÁLCULO V / CÁLCULO DIFERENCIAL - MAT0311 / MAP0217

2017

Prova 2

1. Lembremos que $T: V \to W$ linear é contínua se, e somente se, existe $c > 0$ tal que $||T(v)|| \leq c||v||$, para todo $v \in V$. (*)

($\Rightarrow$) Se uma bijeção linear $T: V \to W$ é um homeomorfismo, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a||v|| \leq ||T(v)|| \leq b||v||$, para todo $v \in V$.

Como T é um homeomorfismo, T e T^{-1} são contínuas. Logo, por (*), existem constantes $b > 0$ e $c > 0$ tais que $||T(v)|| \leq b||v||$, para todo $v \in V$ e $||T^{-1}(w)|| \leq c||w||$, para todo $w \in W$. Então dado $v \in V$, temos $T(v) \in W$ e segue que $||v|| = ||T^{-1}(T(v))|| \leq c||T(v)||$, isto é, $\frac{1}{c}||v|| \leq c||T(v)||$.

Tomando $a = \frac{1}{c}$, segue que $a||v|| \leq ||T(v)|| \leq b||v||$, para todo $v \in V$.

($\Leftarrow$) Se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a||v|| \leq ||T(v)|| \leq b||v||$, para todo $v \in V$, então uma bijeção linear $T: V \to W$ é um homeomorfismo.

Como T é linear e $||T(v)|| \leq b||v||$, para todo $v \in V$, segue, por (*), que T é contínua.

Dado $w \in W$, temos $T^{-1}(w) \in V$ e segue que $||w|| = ||T(T^{-1}(w))|| \geq a||T^{-1}(w)||$, isto é, $||T^{-1}(w)|| \leq \frac{1}{a}||w||$, para todo $w \in W$.

Como T^{-1} é linear e $||T^{-1}(w)|| \leq \frac{1}{a}||w||$, para todo $w \in W$, segue, por (*), que T^{-1} é contínua.

Logo, T é um homeomorfismo.

2. Seja $\phi = f_{|_K}$.

ϕ é injetora, pois f é injetora, e ϕ é sobrejetora, pois seu contradomínio é igual à sua imagem.

ϕ é contínua, pois é restrição da função contínua f.

Para que ϕ seja um homeomorfismo, é preciso mostrar que $\phi^{-1}: f(K) \to K$ é também contínua.

Vamos usar a caracterização que diz que uma função é contínua se, e somente se, a pré-imagem de fechados é fechada.

Seja $G \subseteq K$ um fechado de K. Queremos mostrar que $(\phi^{-1})^{-1}(G) \subseteq f(K)$ é um fechado de $f(K)$. Mas, como ϕ é bijetora, $(\phi^{-1})^{-1}(G) = \phi(G) = f(G)$. Agora, como G é fechado dentro de um compacto, segue que G é compacto. Como f é contínua, $f(G)$ é um compacto em $f(K)$ e, portanto, $f(G)$ é também fechado. Logo, a pré-imagem de um fechado por ϕ^{-1} é fechada e ϕ^{-1} é contínua.

Portanto, ϕ é um homeomorfismo.

3. 1. $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

FALSO.

Se existisse um homeomorifsmo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, então, dado $p \in \mathbb{R}$, teríamos que $f_{|_{\mathbb{R}\setminus\{p\}}}: \mathbb{R}\setminus\{p\} \to \mathbb{R}^2\setminus\{f(p)\}$ seria um homeomorfismo entre a 'reta sem um ponto' e o 'plano sem um ponto', sendo, esse último, conexo enquanto o primeiro é desconexo.

2. O intervalo $]0,1[$ com a métrica usual não é completo, mas é homeomorfo a um espaço métrico completo.

VERDADEIRO.

$]0,1[$ não é completo, pois a sequência de Cauchy $(\frac{1}{n+2})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq]0,1[$ não converge em $]0,1[$.

Mas $]0,1[$ é homeomorfo ao espaço métrico $\mathbb{R}$ com a métrica usual, que é completo. A função $h:]0,1[\to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$ é um homeomorfismo entre esses espaços.

3. Toda função uniformemente contínua é de Lipschitz.

FALSO.

A função $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{x}$ é uma função contínua no compacto $[0,a]$ e, portanto, é uniformemente contínua. Entretanto, ela não é de Lipschitz em nenhuma vizinhança de 0, pois se existisse constante de Lipschitz $c>0$ tal que $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le c|x-y|$, para todos $x,y\in[0,a]$, teríamos $\sqrt{x}\le cx$, de onde $\sqrt{x}\ge\frac{1}{c}$, para todo $x>0$, o que não ocorre.

Seria verdadeiro: Toda função de Lipschitz é uniformemente contínua.

4. Se (M,d) e (N,d') são espaços métricos discretos, toda função $f:M\to N$ é um homeomorfismo.

FALSO

Basta que f não seja bijetora.

Seria verdadeiro: Se (M,d) e (N,d') são espaços métricos discretos, toda bijeção $f:M\to N$ é um homeomorfismo.