MAT0311 – Cálculo V
MAP0217 – Cálculo V

Primeira Prova
(simulação)

Dia: 20 de setembro de 2017

Questão 1, 2.5 pontos

Sejam (M, d) um espaço métrico. Sabemos que F é fechado sse contem a sua fronteira ∂F, e sse contem todo sus pontos limites $x \in F'$. Demonstra que $\overline{F} = F \cup \partial F$, e que $\mathring{F} = F \setminus \partial F$.

Demonstração.

- Sendo que F é fechado sse contem a sua fronteira, obtemos $\overline{F} = F \cup \partial F$, pois:

  1. $F \subseteq \overline{F} \subseteq F \cup \partial F$ por definição de fecho, sendo que $F \cup \partial F$ é fechado contendo F, e sendo $\overline{F}$ o menor fechado contendo F.
  2. $F \cup \partial F \subseteq \overline{F}$, pois $F \subset \overline{F}$, e se $x \in \partial F$, por definição (para todo $\epsilon > 0$ temos $B_{(x,\epsilon)} \cap F \neq \emptyset$ e $B_{(x,\epsilon)} \cap M \setminus F \neq \emptyset$) é de acumulação para F e então é de acumulação para $\overline{F}$, e assim pertece à $\overline{F}$ fechado.

  Vamos ver agora que $\mathring{F} = F \setminus \partial F$:

  1. $\mathring{F} \subset F \setminus \partial F$: seja $x \in \mathring{F} \subset F$, então existe $\delta > 0$ tal que $B_{(x,\delta)} \subset F \subset \overline{F}$, assim $x \notin \partial F$.
  2. $F \setminus \partial F \subset \mathring{A}$: seja $x \in F \setminus \partial F$: existe $\delta > 0$ tal que $B_{(x,\delta)} \cap \partial F = \emptyset$, e então $B_{(x,\delta)} \subset F$.

$\square$

Questão 2, 2.5 pontos

Seja (M, d) um espaço métrico, e $A \subset M$. Demonstre que $A = \partial A$ sse A é fechado e tem interior vazío.

Demonstração.

- Sendo $A = \partial A$, temos que em particular $\partial A \subseteq A$ e ∂A é fechado. Utilizando também $\mathcal{A} = A \setminus \partial A$, obtemos que $\mathcal{A} = \emptyset$.

- Por outro lado, se A é fechado, então contem sua fronteira, assim que $\partial A \subseteq A$. Utilizando também $\mathcal{A} = A \setminus \partial A$, obtemos que se $\mathcal{A} = \emptyset$, então $A = \partial A$.

$\square$

Questão 3, 2.5 pontos

Um espaço topológico (X, τ) diz-se de Hausdorff quando todos $x \neq y \in X$ possuem vizinhanças disjuntas: $x \in U_x \subset X$ e $y \in U_y \subset X$, e $U_x \cap U_y = \emptyset$. Equivalentemente existem A_x, $A_y \subset \tau$ tal que $x \in A_x$, $y \in A_y$ e $A_x \cap A_y = \emptyset$. Demonstra que num espaço de Hausdorff os compactos são fechados.

Demonstração. Vamos ver que, se (X, τ) é de Hausdorff e $K \subset X$ é compacto, então K é fechado. Isso é, vamos ver que $U = X \setminus K$ é aberto.

1. Seja $x \in U$, queremos ver que existe um aberto B tal que $x \in B \subseteq U$.

2. Para todo $y \in K$, sendo $x \neq y$, então existem A_y e B_y abertos tal que $y \in A_y$, $x \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$.

3. A colleção de abertos $(A_y)_{y \in K}$ é uma cobertura aberta de K, e sendo K aberto existe uma subcobertura finita, seja
$$K \subset A_{y_1} \cup ... \cup A_{y_n}.$$

4. Define os conjuntos:
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_{y_i}, \qquad B = \bigcap_{i=1}^{n} B_{y_i}$$

5. Para todo i, A_{y_i} e B_{y_i} são abertos disjuntos, assim que A e B são abertos disjuntos, e $K \subset A$.

6. Para todo i, $x \in B_{y_i}$, assim $x \in B \subset U$, e temos acabado.

$\square$

Questão 4, 2.5 pontos

Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológico de Hausdorff. Uma função $f : X \to Y$ diz-se *própria* quando, para todo K compacto em $(Y, \tau, 2)$, a preimagem $f^{-1}(K)$ é compacta em (X, τ_1). Demonstra que, se f é contínua e (X, τ_1) é compacto, então f é própria.

Demonstração. Lebramos que uma função contínua entre espaços topológico tem as seguintes propriedades: preimagens de abertos são abertas, e preimagens de fechados são fechadas. Queremos demosntrar que, se $K \subset Y$ é compacto em $(Y, \tau, 2)$, a preimagem $f^{-1}(K)$ é compacta em (X, τ_1).

1. Se $K \subset Y$ é compacto em $(Y, \tau, 2)$, sendo $(Y, \tau, 2)$ espaço de Hausdorff, pela questão 2 K é fechado.
2. Sendo f contínua, então $f^{-1}(K)$ é fechado em (X, τ_1).
3. Sendo $f^{-1}(K)$ fechado em X compacto, $f^{-1}(K)$ é compacto.

$\square$