Segundo simulado

1. Seja G o gráfico de f . Então, $G = \{(x, y) \in M \times N; y = f(x)\}$. Vamos exibir um homeomorfismo entre M e G .

Seja $\phi : M \rightarrow G$ dada por $\phi(x) = (x, f(x))$.

ϕ é uma bijeção, pois é injetora ($\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow (x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$) e sobrejetora (dado $P = (x, f(x)) \in G$, temos que $\phi(x) = P$).

ϕ é contínua, pois suas funções coordenadas $\phi_1 : M \rightarrow M$ e $\phi_2 : M \rightarrow N$ são contínuas, uma vez que $\phi_1 = Id$ e $\phi_2 = f$, ambas contínuas.

Além disso, $\phi^{-1} : G \rightarrow M$ é contínua, pois $\phi^{-1} = \pi_M|_G$, ou seja ϕ^{-1} é a restrição da função projeção $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ dada por $\pi_M(x, y) = x$ ao subconjunto G e, como sabemos, π_M é contínua e restrição de função contínua é também contínua.

Portanto, M e G são homeomorfos.

2. Considere $K \neq \emptyset$. Como K é compacto e f é contínua, segue que $f(K) \subset \mathbb{R}^p$ é compacto e, portanto, fechado e limitado.

Como $f(K)$ é limitado e não-vazio, existe $\omega := \sup\{|f(z)|; z \in K\} \in \mathbb{R}$.

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K$ tal que $\omega - \frac{1}{n} < |f(z_n)| \leq \omega$.

Como K é compacto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência $(z_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ convergente em K . Seja x o limite dessa subsequência.

Então $x \in K$ e f é contínua em x , de onde $f(x) = f(\lim_{m \rightarrow \infty} z_{n_m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(z_{n_m})$.

Como $\omega - \frac{1}{n_m} < |f(z_{n_m})| \leq \omega, \forall m \in \mathbb{N}$, temos que $\omega - \frac{1}{n_m} < |f(x)| \leq \omega, \forall m \in \mathbb{N}$ e, portanto, $|f(x)| = \omega$.

Como $f(K)$ é limitado e não-vazio, existe $\alpha := \inf\{|f(z)|; z \in K\} \in \mathbb{R}$.

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K$ tal que $\alpha + \frac{1}{n} > |f(z_n)| \geq \alpha$.

Como K é compacto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência $(z_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ convergente em K . Seja y o limite dessa subsequência.

Então $y \in K$ e f é contínua em y , de onde $f(y) = f(\lim_{m \rightarrow \infty} z_{n_m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(z_{n_m})$.

Como $\alpha + \frac{1}{n_m} > |f(z_{n_m})| \geq \alpha, \forall m \in \mathbb{N}$, temos que $\alpha + \frac{1}{n_m} > |f(y)| \geq \alpha, \forall m \in \mathbb{N}$ e, portanto, $|f(y)| = \alpha$.

Alternativa:

Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(z) = |f(z)|$.

Então g é contínua, pois é composta de funções contínuas.

Logo $g(K)$ é compacto em $\mathbb{R}$ e, portanto fechado e limitado.

Como $g(K)$ é limitado e não-vazio, existe $\omega := \sup(g(K)) \in \mathbb{R}$.

Como $g(K)$ é fechado, segue que $\omega \in g(K)$ e, portanto, existe $x \in K$ tal que $g(x) = \omega$.

Como $g(K)$ é limitado e não-vazio, existe $\alpha := \inf(g(K)) \in \mathbb{R}$.

Como $g(K)$ é fechado, segue que $\alpha \in g(K)$ e, portanto, existe $y \in K$ tal que $g(y) = \alpha$.

3. 1. Toda contração fraca tem um único ponto fixo.

FALSO.

A função identidade $Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma contração fraca, pois $|Id(x) - Id(y)| \leq 1 \cdot |x - y|$, e todos os pontos de $\mathbb{R}$ são fixos por Id .

Seria verdadeiro: Toda contração forte tem um único ponto fixo.

2. Se (M, d) é discreto com a métrica zero-um, então toda $f : M \rightarrow N$ é uniformemente contínua.

VERDADEIRO.

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, tome $\delta = \frac{1}{2}$ (qualquer δ menor que 1 serve). Então, $d(x, y) < \delta \Rightarrow x = y \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) = 0 < \epsilon$.

3. Funções contínuas levam abertos em abertos.

FALSO.

A função constante $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k(x) = 17$ é uma função contínua, e a imagem de qualquer aberto não-vazio por K é o conjunto unitário $\{17\}$, o qual não é aberto em $\mathbb{R}$.

Seria verdadeiro: Funções contínuas têm pré-imagens de abertos sendo conjuntos abertos.

4. Se (W, d_W) é um espaço de Banach (isso é, um espaço vetorial normado, completo com respeito à métrica d_W induzida pela norma $\|\cdot\|_W$), então $(\mathcal{L}(V, W), d_{\mathcal{L}(V, W)})$, onde $d_{\mathcal{L}(V, W)}$ é a métrica induzida pela norma $\|T\|_{\mathcal{L}(V, W)}$, é um espaço de Banach.

VERDADEIRO.

$(\mathcal{L}(V, W), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(V, W)})$ é um espaço normado. Logo $(\mathcal{L}(V, W), d_{\mathcal{L}(V, W)})$ é um espaço métrico e, para ser um espaço de Banach, basta ser completo.

Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{L}(V, W), d_{\mathcal{L}(V, W)})$. Para cada $x \in V$, temos que $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em W . Como W é completo, estas sequências convergem. Seja $T: V \rightarrow W$, dada por $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Como T é limite de funções lineares, segue que T é linear. Como $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, essa é uma sequência limitada. Logo, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|T_n\|_{\mathcal{L}(V, W)} \leq C$, isto é, $\|T_n(x)\|_W \leq C \cdot \|x\|_V, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in V$ e, portanto, $\|T(x)\|_W \leq C \cdot \|x\|_V, \forall x \in V$, concluindo que T é contínua.

Note que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para T , pois dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(V, W)} < \epsilon, \forall n, m \geq n_0$ (esse n_0 existe, pois $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy) e temos que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(V, W)} \leq \epsilon, \forall n \geq n_0$, concluindo que $(\mathcal{L}(V, W), d_{\mathcal{L}(V, W)})$ é um espaço de Banach.