MAT0311 – Cálculo V
MAP0217 – Cálculo V

Terceira Prova
(simulação)

A prova é sobre 8 pontos (logo a nota será multiplicada por 1.25)

Questão 2, 2.5 pontos

O teorema da função inversa e o teorema da função implicita

Questão 2, 2.5 pontos

Considere a função

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to \exp^{y_1+y_2} + x_1(y_1^2 + y_2^2) - 1, \sin(y_1 + 2y_2) + x_1 + x_2$$

- Determina a matriz que representa

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

  (Dica: talvez adiante considerar $g(y) = f(0, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pois $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = dg(0)$).

- Monstre que existem vizinhanças abertas U_1 e U_2 da origem em $\mathbb{R}^2$ e uma função $\psi : U_1 \to U_2$ em $C^1(U_1)$ tal que $\psi(0) = 0$, $f(x, \psi(x)) = 0$ para $x \in U_1$ e se $(x, y) \in U_1 \times U_2$, então $f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow y = \psi(x)$. (Dica: percebe que $f(0, 0) = (0, 0)$ e que $|\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)| \neq 0$).

Questão 3, 3 pontos Justifica ou dá controexemplos.

- Se a resposta é correta e justificada, +1.
- Se a resposta é correta sem justificação, ou com justificação errada +0.25.
- Se a resposta é errada, −0.25.

1. Toda função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que seja $C^1(\mathbb{R}^n)$ é Lipschitz em toda bola aberta $B(a, r)$, $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

2. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida pro $f(x, y) = (x^3, y^3)$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

3. A função coordenadas esféricas

$$S : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$$

$$(r, \theta, \psi) \to r \sin(\theta) \cos(\psi), r \sin(\theta) \sin(\psi), r \cos(\theta)$$

é um difeomorfismo local ao redor de todo ponto do domínio.