O Índice de Fredholm dos operadores de Toeplitz

Severino Toscano Melo & Gustavo Mezzovilla Gonçalves

2020-II

Resumo

Discorremos sobre como calcular o índice de Fredholm de uma classe de Operadores. O presente documento é um registro de duas aulas apresentadas por Severino T. Melo na disciplina de Panorama de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Tais notas foram registradas por Gustavo Pauzner Mezzovilla Gonçalves.

1 Resultados da Álgebra Linear

Exemplo 1.1 (A alternativa de Fredholm)**.** Denote por $C[a,b]$ o conjunto das funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ e considere um operador $T : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ dado por

$$(Tu)(x) = u(x) + \int_a^b \kappa(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

onde $\kappa \in C\big([a,b]\times[a,b]\big)$. Em determinado contexto, tem-se interesse em estudar as equações do tipo $Tu = f$, para uma dada $f \in C[a,b]$.

Um resultado obtido por Fredholm é que existe um subespaço $Y \subset C[a,b]$ de modo que o quociente $C[a,b]/Y$ tenha dimensão finita. Além disso, para qualquer $f \in Y$, existe uma solução u, tal que $Tu = f$. Na verdade, ele ainda provou que $\dim C[a,b]/Y = \dim\ker T$.

Ou seja, para toda f em um subespaço de codimensão finita, a equação $Tu = f$ admite solução, e a diferença de duas dessas soluções pertencem a um subespaço de dimensão finita. Tal propriedade de uma equação linear é classicamente conhecida como *solvabilidade normal*, que poderia ser descrita como uma espécie de “existência e unicidade a menos de subespaços de dimensão finita”.

1.1 Introdução

Definição 1.2. Sejam X e Y espaços vetoriais complexos[1]. Uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ linear é um *operador de Fredholm* se $\ker T$ e $Y/T(X)$ tiverem dimensão finita. Definimos o *índice de* T como sendo a diferença das dimensões:

$$\operatorname{ind} T \coloneqq \dim\ker T - \dim {}^{Y}\!/_{T(X)}.$$

[1] Assim como todos os demais espaços aqui abordados.

Exemplo 1.3. Se X e Y tem dimensões finitas, não tem graça nenhuma porque todo operador linear é de Fredholm. De fato, como X tem dimensão finita e $\ker T$ é um subespaço, $\dim \ker T < \infty$. O quociente $Y/T(X)$ também tem dimensão finita. Segue do *teorema do núcleo e da imagem* que:

$$\dim X = \dim \ker T + \dim T(X) = \dim \ker T + \left(\dim Y - \dim {}^{Y}\!/_{T(X)}\right)$$

e portanto, $\dim Y/T(X) < \infty$.

Exemplo 1.4. Considere $\mathbb{C}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes complexos na variável x. Dado $p \in \mathbb{C}[x]$, $Tp(x) \coloneqq xp(x)$ e $Sp(x) \coloneqq p'(x)$ são operadores de Fredholm com $\operatorname{ind} T = -1$ e $\operatorname{ind} S = 1$.

Exercício 1.5. Suponha que $V = V_1 \oplus V_2$ seja uma soma direta de espaços vetoriais e consideremos operadores de Fredholm $T_i : V_i \longrightarrow V_i$, com $i \in \{1, 2\}$. Defina a *soma direta* $T = T_1 \oplus T_2$ por

$$T(v_1 + v_2) \coloneqq T_1 v_1 + T_2 v_2,$$

onde $v_i \in V_i$ para cada i. Prove que T é de Fredholm e $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T_1 + \operatorname{ind} T_2$.

Exercício 1.6. Se X é um espaço vetorial de dimensão infinita, mostre que para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe um $T_n : X \longrightarrow X$ de Fredholm tal que $\operatorname{ind} T_n = n$.

Note que todo operador $X \longrightarrow X$ inversível é de Fredholm com índice 0.

1.2 Sequências Exatas de Espaços Vetoriais

Definição 1.7. Considere uma família de espaços vetoriais V_n com transformações lineares da forma $T_i : V_i \longrightarrow V_{i+1}$ para todo i. Dizemos que a sequência

$$V_0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} \cdots \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \xrightarrow{T_n} V_{n+1}$$

é uma *sequência exata* se $\ker T_i = T_{i-1}(V_{i-1})$ para todo i. Inclusive, $T_i \circ T_{i-1} = 0$ para todo natural $i \leqslant n$.

Proposição 1.8. Se $U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$ é uma sequência exata com U e W espaços de dimensão finita, então necessariamente V também tem dimensão finita.

Demonstração. Note que $\dim U = \dim \ker T + \dim T(U)$ por U ser de dimensão finita. Como $\ker T \subset U$, segue que $\dim T(U) \leqslant \dim U$. Então[2],

$$\begin{aligned} \dim U + \dim W &\geqslant \dim T(U) + \dim {}^{W}\!/_{S(V)} \\ &= \dim \ker S + \dim {}^{W}\!/_{S(V)} \\ &= \dim V. \end{aligned}$$

Como U e W tem dimensões finitas, terminamos. $\square$

Proposição 1.9. Seja $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção de espaços de dimensão finita. Se

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} \cdots \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$$

[2] Aqui tem um teorema dual ao teorema do núcleo e da imagem.

é uma sequência exata, então:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\dim V_i = 0.$$

Demonstração. Seguimos por indução sobre n. Se $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow 0$ é exata, então $\dim V_1 = 0$. Agora, se $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \longrightarrow 0$ é exata, então T_1 é necessariamente um isomorfismo e portanto, $\dim V_1 - \dim V_2 = 0$.

Para o passo indutivo, suponha que para algum n, qualquer sequência exata da forma $0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow U_n \longrightarrow 0$ satisfaz a identidade desejada:

$$\dim U_1 - \dim U_2 + \cdots + (-1)^{n+1}\dim U_n = 0.$$

Considere a sequência

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} \cdots \xrightarrow{T_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \xrightarrow{T_n} V_{n+1} \longrightarrow 0$$

supondo que ela seja exata (note que esta exigência faz com que T_n seja sobrejetora). Restrinja tal sequência até a imagem do penúltimo espaço não nulo:

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{T_1} \cdots \xrightarrow{T_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} \operatorname{Im} T_{n-1} \longrightarrow 0$$

Por hipótese de indução, segue que

$$\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i+1}\dim V_i + (-1)^n\big(\dim V_{n-1} - \dim \operatorname{Im} T_{n-1}\big) = 0. \tag{1}$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem sobre T_n (e por sua sobrejetividade),

$$\dim V_n = \dim\ker T_n + \dim \operatorname{Im} T_n = \dim \operatorname{Im} T_{n-1} + \dim V_{n+1}.$$

Isolando $\dim \operatorname{Im} T_{n-1}$ na relação acima, basta substituir tal expressão na equação (1) e concluir o a demonstração do teorema pelo princípio da indução finita. $\square$

Teorema 1.10. Sejam $T : U \longrightarrow V$ e $S : V \longrightarrow W$ operadores de Fredholm. Então ST é um operador de Fredholm e além disso $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.

Demonstração. Vamos montar uma sequência exata especial. O início dela será a inclusão $\ker T \hookrightarrow \ker(ST)$. Como $ST(U) \subset S(V) \subset W$, então temos $W/ST(U) \longrightarrow W/S(V)$ definida naturalmente. Formamos a seguinte sequência:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker T \arrow[r, hook] & \ker(ST) \arrow[r, "T"] & \ker S \arrow[dll, "\pi"] & \\
& V/T(U) \arrow[r, "\widetilde{S}"'] & W/ST(U) \arrow[r] & W/S(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde $\pi : V \longrightarrow V/T(U)$ é a projeção natural e $\widetilde{S} : x + T(U) \longmapsto Sx + ST(U)$ (que de fato está bem definida).

Afirmamos que a sequência acima é exata. Mostremos algumas inclusões:

$[\ker \pi \subset T(\ker(ST))]$ Seja $x \in \ker \pi$, ou seja: $x \in \ker S \cap T(U)$. Se $y \in U$ é tal que $x = Ty$, segue que $0 = Sx = (ST)y$. Dessa forma, $y \in \ker(ST)$ e portanto $x \in T(\ker(ST))$.

$[\ker \widetilde{S} \subset \pi(\ker S)]$ Seja $x \in V$ tal que $\widetilde{S}(x + T(U)) = 0$. Dessa forma, $Sx + ST(U) = 0$, i.e., $Sx \in ST(U)$. Se $y \in U$ é tal que $STy = Sx$, defina $x' := x - Ty \in \ker S$. Logo:

$$x' + T(U) = x + T(U) = \pi(x')$$

e portanto $x + T(U) \in \pi(\ker S)$.

As demais inclusões ficam como exercício. Da proposição 1.8 segue que todos os espaços da sequência exata são de dimensão finita. E pela proposição 1.9, segue que:

$$\begin{aligned} &\dim \ker T - \dim \ker(ST) + \dim \ker S \\ &\quad - \dim {}^{V}\!/_{T(U)} + \dim {}^{W}\!/_{ST(U)} - \dim {}^{W}\!/_{S(V)} \end{aligned} = 0.$$

Ou seja: $\operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S = \operatorname{ind}(ST)$. □

Teorema 1.11. Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é de Fredholm se, e somente se, existe um aplicação $S : Y \longrightarrow X$ tal que $ST - I_X$ e $TS - I_Y$ tem a dimensão da imagem finita.

Corolário 1.12. Dado X um espaço vetorial, definimos $\mathcal{E}(X)$ o conjunto dos automorfismos $X \longrightarrow X$ de posto finito. Então: $\mathcal{E}(X)$ é um ideal da álgebra $\mathcal{L}(X)$.

Se $\pi : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{L}(X)/\mathcal{E}(X)$ é a projeção usual, podemos reformular este enunciado da seguinte maneira: $T \in \mathcal{L}(X)$ é Fredholm se, e somente se, $\pi(T)$ é inversível.

Teorema 1.13. Se $T : X \longrightarrow Y$ é Fredholm e $F : X \longrightarrow Y$ tem posto finito, então $T + F$ é Fredholm e $\operatorname{ind}(T + F) = \operatorname{ind} T$.

Para uma referência sobre estes teoremas, consulte a seção "*Algebraic theory of Fredholm operators*" do apêndice 2 de Cordes (1979).

2 Operadores de Toeplitz

2.1 Preliminares da Análise Funcional

Definição 2.1 (Espaços de Hilbert)**.** Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial (complexo) H com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que se torna completo[3] quando munido da norma induzida pelo produto interno:

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad (x \in H)$$

Definição 2.2. Um subconjunto $\{x_1, x_2, \cdots\}$ de um espaço de Hilbert H é um conjunto *ortonormal completo* se

$$\langle x_j, x_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k. \\ 1 & \text{se } j = k. \end{cases}$$

e se $x \in H$ é tal que $\langle x, x_k \rangle = 0$ para todo k, então $x = 0$.

[3] No sentindo de sequências de Cauchy.

Esta definição acima substitui a noção de uma base ortonormal em espaços de dimensão finita, mas não sendo uma base no sentido de álgebra linear.

Neste contexto, trabalhamos apenas com os espaços Hilbert com conjuntos ortonormais completos *enumeráveis*. Estes são chamados *separáveis* (existe um subconjunto denso e enumerável - alvo da próxima proposição).

Proposição 2.3. O conjunto $\langle\beta\rangle$ das combinações lineares de um conjunto ortonormal completo $\beta = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset H$ de um espaço de Hilbert é denso em H. Reciprocamente, se β é um conjunto ortonormal e $\langle\beta\rangle$ é denso em H, então β é completo.

Proposição 2.4. Dado M um subespaço de H (de Hilbert), definimos o $M^\perp$ como a coleção dos vetores $x \in H$ tais que $\langle x, y\rangle = 0$ para qualquer $y \in M$. Dado $x \in H$ e um subespaço M fechado, existe um único $x_M \in M$ tal que $x - x_M \in M^\perp$.

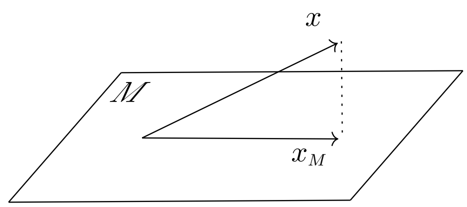


Figura 1: Ilustração da proposição 2.4

Tal proposição induz a aplicação $P_M \colon H \longrightarrow H$ definida por $P_M x \coloneqq x_M$, que é linear e satizfaz $\|P_M x\| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in H$. Além disso, $P_M^2 = P_M$, $P_M(H) = M$ e $\ker P_M = M^\perp$. Ela é chamada de *projeção ortogonal* sobre M.

Proposição 2.5. Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \longrightarrow H$ um operador linear. As afirmações a seguir são equivalentes:

(*i*) T é continua.

(*ii*) T é contínua em 0.

(*iii*) Existe $C \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ para todo $x \in H$.

(*iv*) Se $S \subset H$ é limitado (isto é, contido em uma bola), então $T(S)$ também é.

Define-se uma norma no espaço vetorial $\mathcal{B}(H)$ de todas as transformações lineares satisfazendo uma das quatro (e portanto todas) condições da proposição 2.5 por

$$\|T\| \coloneqq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Inclusive, $\|T\|$ é a menor constante C tal que $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ para todo x, e $\mathcal{B}(H)$ é completo nesta norma, mas não vem ao caso.

Proposição 2.6. Dado $T \in \mathcal{B}(H)$, existe um único $T^* \in \mathcal{B}(H)$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ para todos $x, y \in H$.

Definição 2.7. Um operador *compacto* em H é uma transformação linear $K : H \longrightarrow H$ tal que, para toda bola B contida em H, o fecho de $T(B)$ é compacto. Denotamos por $\mathcal{K}(H)$ o conjunto de todos os operadores compactos em H.

Note que todo operador compacto manda conjuntos limitados em limitados e portanto, é limitado e contínuo.

Proposição 2.8. $\mathcal{K}(H)$ é um ideal fechado da álgebra $\mathcal{B}(H)$. Um operador $T \in \mathcal{B}(H)$ é compacto se e somente se existem $T_n \in \mathcal{B}(H)$, a imagem $T_n(H)$ tem dimensão finita, tais que $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.

Vale comentar que a segunda parte dessa proposição ficou por meio século como um problema em aberto para de espaços de Banach em geral (um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo). Em 1972, Enflo encontrou um contraexemplo.

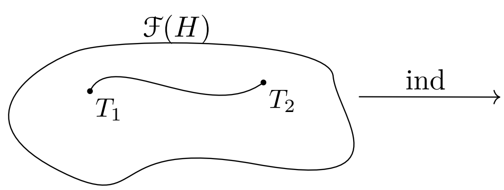
Teorema 2.9. Se $K \in \mathcal{K}(H)$, então $I + K$ é um operador de Fredholm de índice zero.

Este resultado, conhecido como a *Alternativa de Fredholm*, deu origem à teoria do índice.

Denote por $\mathcal{F}(H)$ o espaço dos operadores limitados $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que T é um operador de Fredholm.

Teorema 2.10 (Atkinson)**.** Um operador limitado $T \in \mathcal{B}(H)$ em um espaço de Hilbert é de Fredholm se, e somente se, ele é invertível modulo pertubação compacta. Ou seja: Se existe um $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que $I - TS$ e $I - ST$ são operadores compactos, então T é um operador de Fredholm.

Teorema 2.11. O conjunto dos operadores de Fredholm limitados $\mathcal{F}(H)$ é um aberto em $\mathcal{B}(H)$. Além disso, o índice de Fredholm $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(H) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é uma aplicação contínua (localmente constante). Além disso, existe uma curva contínua contida em $\mathcal{F}(H)$ conectando dois operadores de Fredholm $T_1, T_2 \in \mathcal{F}(H)$ se e somente se $\operatorname{ind} T_1 = \operatorname{ind} T_2$.



$$\begin{aligned} \operatorname{ind} T_1 &= \operatorname{ind}(tT_1 + (1-t)T_2) \\ &= \operatorname{ind} T_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Figura 2: Caracterização das componentes conexas

2.2 Operadores de Toeplitz

Os operadores de Toeplitz surgem num contexto de análise clássica (principalmente dentro dos estudos de funções analíticas de uma variável complexa), fora do domínio da Álgebra de Operadores.

Seja $S^1 \subset \mathbb{C}$ a circunferência unitária centrada na origem do plano complexo e defina em $C(S^1)$ o seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} \, \mathrm{d}\theta. \tag{2}$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja $e_k \in C(S^1)$ definida por $e_k(z) = z^k$, $z \in S^1$. O conjunto $\{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é ortonormal. As combinações lineares dos elementos deste conjunto são chamadas de *po-*

linômios trigonométricos. Tal nome surge da análise das partes reais e imaginárias destes polinômios que moram em $\mathbb{C}[\text{sen}(\theta), \cos(\theta)]$.

Teorema 2.12. (Rudin, 1987, Theorem 4.25) Dados $f \in C(S^1)$ e $\varepsilon > 0$, existe um polinômio trigonométrico p tal que $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in S^1$.

Ou seja, toda função contínua em S^1 pode ser uniformemente aproximada por polinômios trigonométricos. Tal sequência que pode ser obtida não diz nada a respeito da convergência da série de Fourier de f. O teorema de Férjet (veja Figueiredo (1987)) afirma que a média das somas parciais simétricas da série de Fourier da função de fato convergem uniformemente.

Corolário 2.13. O conjunto dos polinômios trigonométricos é denso em $C(S^1)$ munido da métrica induzida pelo produto interno (2).

Demonstração. Dadas $f, g \in C(S^1)$ quaisquer, note que

$$\|f - g\|^2 \leqslant \Big(\sup_{z \in S^1} |f(z) - g(z)|\Big)^2,$$

como gostaríamos. □

O espaço com produto interno $(C(S^1), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ não é completo e seu completamento (via sequências de Cauchy) é $L^2(S^1)$. Segue do corolário 2.13 que $\{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2(S^1)$.

Definição 2.14. O espaço de Hardy $\mathcal{H}^2(S^1)$ é o menor subespaço fechado de $L^2(S^1)$ que contém o conjunto ortonormal $\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$. Denotamos por $P = P_{\mathcal{H}^2(S^1)}$ a projeção ortogonal de $L^2(S^1)$ em $\mathcal{H}^2(S^1)$.

Equivalentemente, dada uma função $f \in L^2(S^1)$, $f \in \mathcal{H}^2(S^1)$ se e somente se, os coeficientes $\langle f, e_k \rangle$ da série de Fourier de f são todos *nulos* para $k < 0$. Em particular,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

com $a_n = \langle f, e_n \rangle$, define uma função analítica no disco aberto delimitado por S^1. Ou seja, as funções de S^1 pertencentes a $H^2(S^1)$ podem ser estendidos analiticamente ao disco aberto. Pode-se provar, indo um pouco mais além, que o espaço de Hardy $H^2(S^1)$ consiste precisamente do conjunto das funções de $L^2(S^1)$ que são valores de fronteira em S^1 de funções holomorfas definidas no disco aberto.

Segue que $\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$ é um sistema ortonormal completo de $\mathcal{H}^2(S^1)$.

Definição 2.15. Dada $\varphi \in C(S^1)$, o *operador de Toeplitz* com simbolo φ, é definido por

$$\begin{array}{rccc} T_\varphi : & \mathcal{H}^2(S^1) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2(S^1) \\ & f & \longmapsto & P(\varphi f) \end{array}.$$

Escrevendo T_φ em termos de $e_0, e_1, \ldots$, a “matrix infinita” de T_φ possui diagonais constantes paralelas a diagonal principal. Estas são chamadas de *matrizes de Toeplitz.* Foi estudando propriedades dessas matrizes que Toeplitz deu origem à teoria dos que viriam a ser chamado de *operadores de Toeplitz.*

Definindo $\|\varphi\|_\infty = \sup_{z\in S^1} |\varphi(z)|$, temos que

$$\|T_\varphi(f)\| = \|P(\varphi f)\| \leqslant \|\varphi f\|_2 \leqslant \int |\varphi f|^2 \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_2 \tag{3}$$

para qualquer $\varphi \in C\left(S^1\right)$ e portanto, T_φ é limitado. Inclusive, vale na verdade que $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ (isso se pode provar com técnicas de C^*-álgebras, como veremos ao final da seção).

É fácil ver que $T_{e_1}(e_k) = e_{k+1}$ para todo k inteiro não negativo, $T_{e_{-1}}(e_0) = 0$ e $T_{e_{-1}}(e_k) = e_{k-1}$ com k um inteiro positivo. Além disso, vemos também que

$$T_{e_k} = T_{e_1}^k \quad \text{e} \quad T_{e_{-k}} = T_{e_{-1}}^k$$

para todo inteiro positivo k.

Proposição 2.16. Para quaisquer $f, g \in C(S^1)$, $T_{fg} - T_f T_g$ é um operador compacto no espaço de Hardy $H^2(S^1)$.

Demonstração. Qualquer elemento x num espaço de Hilbert com base ortonormal $\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$ pode ser escrito como $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n$. Assim, podemos encarar um espaço de Hilbert como um espaço de sequências, e em alguns casos, é melhor estudar o operador atuando nas sequências do mesmo.

Seja $f \in \mathcal{H}^2(S^1)$ visto como uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $f_n = \langle f, e_n\rangle$. Note que a sequência $e_1 f$ é a sequência "*shifitada*":

$$f \cong (f_0, f_1, f_2 \cdots) \Rightarrow e_1 f \cong (0, f_0, f_1, \cdots)$$

. Para k inteiro positivo qualquer, $e_k f \in \mathcal{H}^2(S^1)$ e $T_{e_k}(f) = e_k f$. Além disso, se

$$f \cong (f_0, f_1, f_2 \cdots) \Rightarrow T_{e_k}(f) \cong (f_k, f_{k+1}, \cdots)$$

.

Vamos provar a proposição então:

- Sejam $k, \ell \in \mathbb{Z}$ inteiros de mesmo sinal. Então $T_{e_k} T_{e_\ell} = T_{e_{k+\ell}}$ evidentemente. Além disso, se k é positivo,

  $$T_{e_{-k}} T_{e_k} = I \quad \text{e} \quad T_{e_k} T_{e_{-k}} = I - P_k$$

  onde P_k é a projeção das primeiras k-componentes. De fato,

  $$T_{e_k} T_{e_{-k}}(f) \cong T_{e_k}(f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \cdots) = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{k \text{ casas}}, f_k, f_{k+1}, \cdots).$$

  Portanto, se ℓ tem o mesmo sinal de k, $T_{e_\ell}(T_{e_k} T_{e_{-k}}) = T_{e_\ell} - T_{e_\ell} P_k$ e, já que $T_{e_\ell} P_k$ tem posto finito e portanto é compacto, o operador

  $$T_{e_\ell} - T_{e_{k+\ell}} T_{e_{-k}} \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^2(S^1))$$

  também é compacto. Assim se prova o resultado para os monômios e_n, $n \in \mathbb{Z}$.

- Como $\varphi \mapsto T_\varphi$ é uma aplicação linear, se p e q são polinômios trigonométricos, então $T_{pq} - T_p T_q$ é um operador compacto (pelo passo anterior). Segue da desigualdade (3) que a aplicação $\varphi \mapsto T_\varphi$, definida de $C(S^1)$ em $\mathcal{B}$ é limitada e portanto contínua. Veremos em seguida que segue da densidade dos polinômios trigonométricos em $C(S^1)$ (corolário 2.13) o resultado geral.

  De fato, sejam $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sequências de polinômios trigonométricos tais que $p_n \to f$ e $q_m \to g$, com $f, g \in C(S^1)$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $n_\varepsilon, m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tais que

  $$\|f - p_n\| < \frac{\varepsilon}{2L_1} \quad \text{e} \quad \|g - q_m\| < \frac{\varepsilon}{2L_2}$$

  onde L_1 e L_2 são constantes *a determinar*, para quaisquer $n \geqslant n_\varepsilon$ e $m \geqslant m_\varepsilon$. Suponha sem perda de generalidade que $n_\varepsilon \geqslant m_\varepsilon$. Das desigualdades triangular e (3), temos

  $$\begin{aligned} \|T_{p_n q_n} - T_f T_g\| &\leqslant \|p_n q_n - fg\| \\ &= \|p_n q_n - f q_n + f q_n - fg\| \\ &\leqslant \|p_n - f\| \cdot \|q_n\| + \|f\| \cdot \|q_n - g\| \end{aligned}$$

  Como g pode ser aproximado por q_n, a sequência $\|q_n\|$ é limitada. Podemos tomar portanto um $L_1 > 0$ tal que $L_1 \geqslant \|q_n\|$ para todo $n \geqslant n_\varepsilon$. Tomando $L_2 = \|f\|$, vem

  $$\begin{aligned} \|T_{p_n q_n} - T_f T_g\| &\leqslant \|p_n - f\| \cdot \|q_n\| + \|f\| \cdot \|q_n - g\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2L_1} \cdot \|q_n\| + \|f\| \cdot \frac{\varepsilon}{2L_2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

  para todo $n \geqslant n_\epsilon$. Provamos que $T_{p_n q_n} - T_f T_g \to T_{fg} - T_f T_g$. Como $\mathcal{K}(\mathcal{H}^2(S^1))$ é fechado, $T_{fg} - T_f T_g$ é o limite de de operadores compactos e portanto, também é compacto.

$\square$

Decorre agora o seguinte critério de "*Fredholmness*". Se $\varphi \in C(S^1)$ onde $\varphi(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$, então existe um operador compacto K no espaço de Hardy $\mathcal{H}^2(S^1)$ tal que

$$T_\varphi T_{1/\varphi} = T_{\varphi(1/\varphi)} + K = I + K.$$

Segue do Teorema de Atkinson 2.10 de que T_φ é um operador de Fredholm se φ nunca se anula.

Exercício 2.17. Prove que se k é inteiro, então $\operatorname{ind} T_{e_k} = -k$.

Dada uma função $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ continuamente derivável, definimos o *número de rotação* de γ por

$$n(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z$$

(γ pode ser vista como uma curva fechada no plano complexo). É possível estender a definição de número de rotação supondo apenas que γ seja contínua (veja Lima (1977)) de modo que valha o seguinte teorema:

Teorema 2.18. Sejam $f, g \in C(S^1, \mathbb{C} - \{0\})$. Existe uma homotopia entre f e g se, e somente se, $n(f) = n(g)$.

Dessa forma, dada $f \in C(S^1)$ que nunca se anula, sabemos que f é homotópica ao monômio $e_{n(f)}$. Denote por

$$\begin{array}{rccc} \psi : & [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{H}^2(S^1)) \\ & h & \longmapsto & f_h \end{array}$$

a homotopia entre f e $e_{n(f)}$. Sabemos que se $h_1 \to h_2$, então $\|f_{h_1} - f_{h_2}\| \to 0$. Pela estimativa (3),

$$\|T_{f_{h_1}} - T_{f_{h_2}}\| \leqslant \|f_{h_1} - f_{h_2}\| \overset{h_1 \to h_2}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, a função $\tilde{\psi}(h) = T_{f_h} \in \mathcal{F}(H)$ é contínua, e $\mathrm{ind} \circ \tilde{\psi}$ também é contínua, logo constante. Em particular, $\mathrm{ind}(\tilde{\psi}(1) = \mathrm{ind}(\tilde{\psi}(0)$. Isto prova a seguinte fórmula para o índice de Fredholm de um operador de Toeplitz T_φ, quando φ é contínua e nunca se anula:

$$\boxed{\mathrm{ind}\, T_f = \mathrm{ind}\, T_{f_k} = \mathrm{ind}\, T_{e_{n(f)}} = -n(f).}$$

É interessante observar que vale a volta do critério de Fredholmness que usamos acima. Com a realização concreta da álgebra de Toeplitz (definição A.2), temos $\mathcal{K}(S^1) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}^2(S^1))$, além de que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}/\mathcal{K}(S^1) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{C}(S^1) \\ [T_\varphi] & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

é um isomorfismo, e pela teoria geral de C^*-álgebras, *todo isomorfismo é uma isometria.* Segue que se $T\varphi$, $\varphi \in C(S^1)$, é um operador de Fredholm, então φ nunca se anula, de modo que a fórmula para o índice de T_φ que obtivemos cobre todos os casos em que T_φ, $\varphi \in C(S^1)$, é um operador de Fredholm.

Também segue deste isomorfismo de C*-álgebras que

$$\|T_\varphi\| \overset{(3)}{\leqslant} \|\varphi\|_\infty = \|[T_\varphi]\|_{\mathcal{T}/\mathcal{K}(S^1)} = \inf_{K \in \mathcal{K}(S^1)} \|T_\varphi + K\| \leqslant \|T_\varphi\|,$$

melhorando a estimativa (3) para uma igualdade.

A A Álgebra de Toeplitz Abstrata

Seja H um espaço de Hilbert com um sistema ortonormal completo $\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$.

Proposição A.1. Existe um único $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que $Se_j = e_{j+1}$, para todo j inteiro não negativo. Além disso, S satisfaz $\|Sx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$ e S^* é dado por $S^*e_0 = 0$ e $S^*e_j = e_{j-1}$ para todo inteiro j positivo.

Um exemplo de tal espaço é o espaço de Hardy dada na definição 2.14 com os monômios $e_n(z) \coloneqq z^n$, e S é o operador de Toeplitz com símbolo e_1.

Definição A.2. A *álgebra de Toeplitz* gerada por S é a menor subálgebra fechada $\mathcal{T}$ de $\mathcal{B}(H)$ que contém S, S^* e a identidade I.

A menos de isomorfismos, $\mathcal{T}$ não depende da escolha de H e do conjunto ortonormal completo.

Teorema A.3. (Douglas, 2012, Theorem 7.23) $\mathcal{K}(H) \subset \mathcal{T}$ e existe um *isomorfismo de álgebras

$$\mathcal{T}/\mathcal{K}(H) \longrightarrow C(S^1)$$

que leva $[S]$ na função identidade $z \longmapsto z$.

Uma demonstração deste teorema sem precisar desbravar os 7 capítulos da referência original pode ser consultada em `https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2017/toeplitz.pdf`.

Referências

[Cordes 1979] Cordes, Heinz O.: *Elliptic pseudo-differential operators: An abstract theory.* Bd. 756. Springer, 1979

[Douglas 2012] Douglas, Ronald G.: *Banach algebra techniques in operator theory.* Bd. 179. Springer Science & Business Media, 2012

[Figueiredo 1987] Figueiredo, Djairo G.: *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1987

[Lima 1977] Lima, Elon L.: *Grupo fundamental e espaços de recobrimento.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CN Pq., 1977

[Rudin 1987] Rudin, Walter: *Real and complex analysis.* 3. Tata McGraw-hill education, 1987. – 433 S