

# Algoritmos quase lineares para fluxos em grafos

Victor Sanches Portella

Orientador: prof. Dr. Marcel Kenji de Carli Silva

Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo

16 de novembro de 2016

# Sobre o que vou falar

- Laplaciano de um grafo
- Resolvedores Laplacianos
- Fluxos elétricos
- Um algoritmo quase linear para fluxo

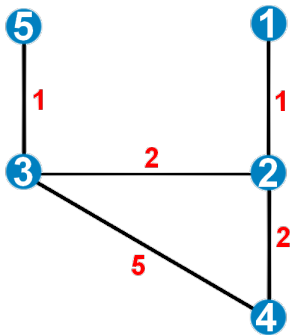
# Introdução

- *Big Data* é cada vez mais comum
- Algoritmos quadráticos já são inviáveis
- Soluções aproximadas são úteis em diversos contextos atuais

O **Laplaciano** de um grafo  $G = (V, E)$

$$\mathcal{L}_G(w)_{ij} := \begin{cases} \sum_{e \in \delta(i)} w_e & \text{se } i = j \\ w_{ij} & \text{se } ij \in E, \\ 0 & \text{c.c} \end{cases} \quad \forall i, j \in V.$$

$L_G$  é o Laplaciano do grafo sem pesos



$$\mathcal{L}_G(w) = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \textcircled{5} & \boxed{-2} & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & \textcircled{8} & \boxed{-5} & \boxed{-1} \\ 0 & \boxed{-2} & \boxed{-5} & \textcircled{7} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

Um **sistema Laplaciano** é um sistema linear da forma

$$Lx = b,$$

onde  $L$  é o Laplaciano de um grafo.

# Resolvedores Laplacianos

- Resolvedor **aproximado** de Spielman e Teng
- Primeiro a resolver em tempo  $\tilde{O}(m) = O(m \log^c m)$
- Outros resolvedores, mais eficientes e simples, têm sido desenvolvidos
- Usados como primitivas para algoritmos quase lineares



## Um Resolvedor $\tilde{O}(m^{4/3})$

- A construção de Spielman e Teng é complexa (150 páginas em 3 papers)
- Construção de um resolvedor  $\tilde{O}(m^{4/3})$  com técnicas em comum
- Precondicionamento: considerar  $MLx = Mb$  no lugar de  $Lx = b$
- Árvores geradoras são bons condicionadores se um sistema Laplaciano

# Fluxo

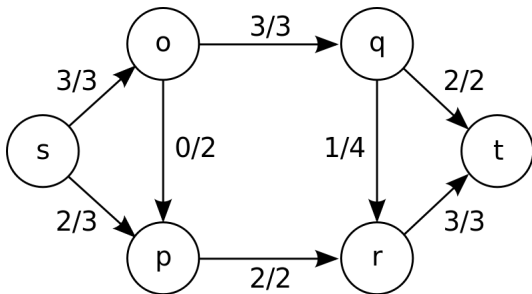
# Definição

Um  $(s, t)$ -**fluxo** no grafo  $G = (V, E)$

$$\sum_{e \in \delta(v)} f_e = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}.$$

Quando se tem **capacidades**, um fluxo é **viável** se

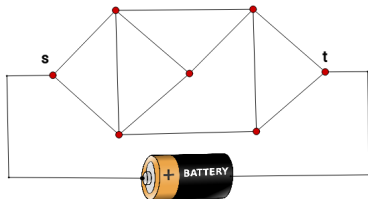
$$|f_e| \leq u_e \quad \forall e \in E.$$



Fonte: Maksim, usuário da Wikipedia. Imagem licenciada por Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

# Fluxos elétricos

O fluxo é **elétrico** em um grafo com pesos se ele minimiza a **energia**.



- Fluxos elétricos a partir de um sistema Laplaciano
- Resolvedores aproximados nos dão fluxos **aproximadamente elétricos**

# Fluxos viáveis através de fluxos elétricos

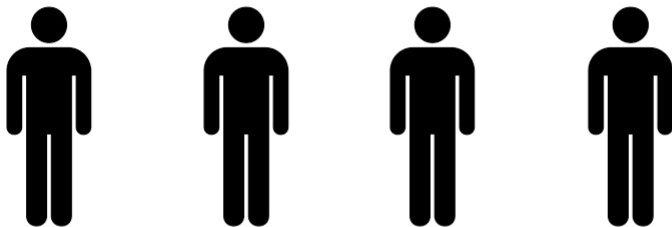
- Fluxos elétricos podem não respeitar as capacidades
- Calcular diversos fluxos elétricos com diferentes resistências
- Como saber quanto mudar nas resistências?



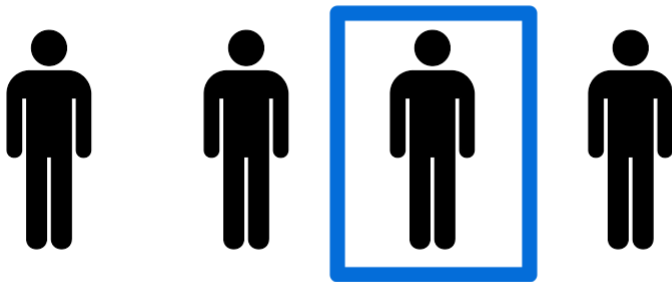
# Método da atualização multiplicativa de pesos (MWU)

- Repetidamente escolher uma dentre  $n$  opções
- Pesos nas escolhas, penalizando escolhas ruins
- Resultado comparável com o de uma escolha fixa de um “vidente”

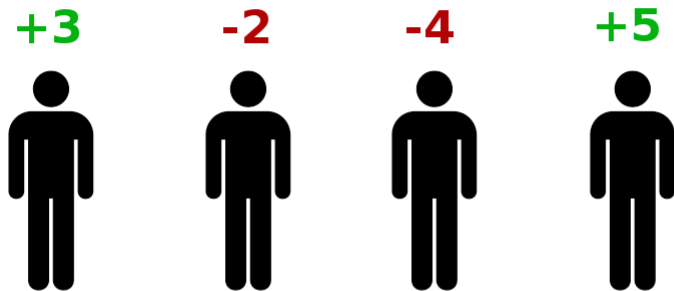
# Exemplo do MWU



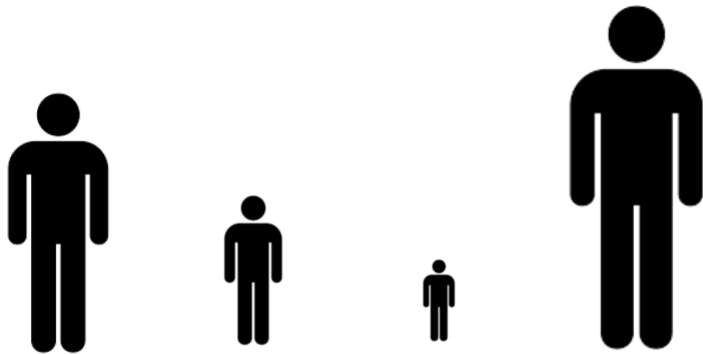
# Exemplo do MWU



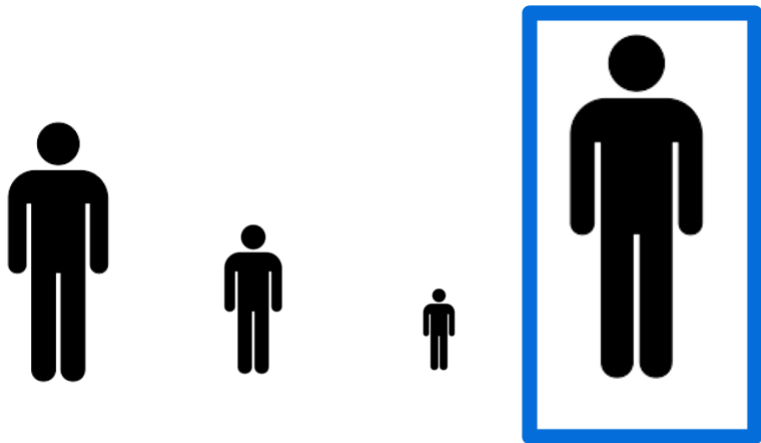
# Exemplo do MWU



# Exemplo do MWU



# Exemplo do MWU



# Aplicando o MWU para fluxos

- Calculamos um fluxo elétrico com resistências iguais
- Penalize arestas que violaram muito suas capacidades
- No final, faça uma média dos fluxos

Perguntas?