

**ESTATÍSTICAS DE ÁRVORES BINÁRIAS**

Y. KOHAYAKAWA

Neste desafio, você verificará empiricamente as afirmações que vimos em aula sobre a profundidade média dos nós em uma (i) árvore de busca binária gerada a partir de uma permutação aleatória de  $N$  chaves distintas e em uma (ii) árvore binária escolhida uniformemente ao acaso, dentre todas as árvores com  $N$  nós internos.

**Árvores de busca binária aleatórias.** Escreva um programa que, dado  $N \geq 1$ , gera uma permutação aleatória dos inteiros  $1, \dots, N$ , digamos  $\rho: [N] \rightarrow [N]$ , e que contrói uma ABB com estas chaves, inserindo-as na ordem

$$\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(N).$$

- Execute seu programa para valores grandes de  $N$ , várias vezes, e compile estatísticas sobre as árvores geradas (possivelmente também fazendo alguns histogramas para ilustrar seus dados de forma intuitiva). Você pode calcular a altura média e os comprimentos interno e externo médios.
- Uma estatística um pouco diferente refere-se à eficiência de se contruir tais árvores: você pode verificar qual é o número médio de comparações que se faz para construir estas árvores com  $N$  nós.

Lembre que o resultado fundamental visto em aula (mas não demonstrado) é que tais árvores tem comprimento interno basicamente igual a  $2N \log N$ .

**Árvores de busca binária uniformes.** Escreva um programa que, dado  $N \geq 1$ , gera uma árvore binária com  $N$  nós internos, com todas estas árvores equiprováveis. *Você vai ter de pensar um pouco como fazer isto.* Você pode usar o fato mencionado em sala que diz que o número de tais árvores é

$$t(N) = \frac{1}{N+1} \binom{2N}{N}.$$

- Execute seu programa para valores grandes de  $N$ , várias vezes, e compile estatísticas sobre as árvores geradas (possivelmente também fazendo alguns histogramas). Você pode calcular a altura média e os comprimentos interno e externo médios.

Lembre que o resultado fundamental visto em aula (mas não demonstrado) é que tais árvores tem comprimento interno basicamente igual a  $N\sqrt{\pi N}$ .

**Observações.** Você pode achar interessante consultar a página

<http://cgm.cs.mcgill.ca/~luc/trees.html>

escrita por **Luc Devroye**, do Departamento de Ciência da Computação da Universidade de McGill.