PROVA DE MATEMÁTICA DISCRETA
2o. SEMESTRE DE 2002

Instruções. Esta prova é *individual*, mas naturalmente você pode consultar suas anotações, livros, etc. Entregue suas soluções até as 12:00 do dia 16/12/2002, na secretaria do MAC. Faça quantas questões quanto você conseguir; minha expectativa é que você consiga basicamente fazer todas as 6 questões. Após a entrega, farei uma pequena entrevista com cada aluno que fizer a prova.

1. Para naturais n, a, e b, seja
$$f(n,a,b) = \max|\mathcal{F}|, \tag{1}$$
onde o máximo é tomado sobre todos os sistemas de conjuntos $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ satisfazendo
$$|F| \equiv a \pmod 2 \qquad \text{para todo } F \in \mathcal{F} \tag{2}$$
e
$$|F \cap F'| \equiv b \pmod 2 \quad \text{para todo } F,\, F' \in \mathcal{F} \text{ com } F \neq F'. \tag{3}$$
Determine ou estime $f(n,a,b)$ para todos pares $(a,b) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$.
2. Para todo natural $n > 1$, seja
$$\Omega(n) = \sum_i e_i, \tag{4}$$
onde $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ é a fatoração de n em primos distintos. Isto é, $\Omega(n)$ é o número de primos que dividem n, contados com multiplicidade. Prove que
$$\Omega(n) = (1 + o(1)) \log\log N \tag{5}$$
para quase todo n escolhido uniformemente ao acaso em $[N]$.
3. Sejam dados um natural n e um real $\varepsilon > 0$. Seja
$$g_\varepsilon(n) = \sup|S|, \tag{6}$$
onde o supremo é tomado sobre todos os $S \subset \mathbb{R}^n$ tais que para todo $x \in S$, temos $\|x\| = 1$, e para todo x e $y \in S$ com $x \neq y$ temos $|\langle x, y\rangle| \leq \varepsilon$.
(i) Prove que $g_\varepsilon(n) < \infty$ para todo $n \geq 1$ e $\varepsilon < 1$.
(ii) Mais ainda, prove que $\limsup_{n\to\infty} g_\varepsilon(n)^{1/n} < \infty$ se $\varepsilon < 1$.

Date: Versão de 12 de dezembro de 2002.

(*iii*) Prove que para qualquer $\varepsilon > 0$ existem n_0 e $\delta > 0$ tais que

$$g_\varepsilon(n) \geq (1+\delta)^n \tag{7}$$

para todo $n \geq n_0$.

4. Prove que quase todo grafo G^n é conexo.
5. Dizemos que um grafo é k-*universal* se ele contém todos os grafos com k vértices como subgrafos induzidos. Ademais, dizemos que um grafo G satisfaz a propriedade $P(a,b)$ se, para toda a-upla $x_1, \ldots, x_a \in V(G)$ e toda b-upla $y_1, \ldots, y_b \in V(G)$ de vértices distintos de G, existe um vértice z em G, diferente de todos os x_i e y_j, tal que z é adjacente a todos os x_i $(1 \leq i \leq a)$ e não é adjacente a nenhum y_j $(1 \leq j \leq b)$.
   (*i*) Prove que se G satisfaz $P(k-1, k-1)$, então G é k-universal.
   (*ii*) Prove que quase todo grafo G^n é k-universal para todo k fixo.
6. Vimos dois teoremas de Roth. A grosso modo, estes resultados podem ser enunciados da seguinte forma: (*i*) Para qualquer $A \subset [N]$, existe uma progressão aritmética $P \subset [N]$ para o qual a discrepância

$$\big||A \cap P| - \eta |P|\big|,$$

é 'grande', onde $\eta = |A|/N$. (*ii*) Para qualquer conjunto $A \subset [N]$ com $|A|/N \geq \eta$, onde $\eta > 0$ é uma constante positiva, se $N \geq N_0(\eta)$, então A contém uma progressão aritmética com três elementos. Escreva a prova destes dois resultados em um único texto, de forma organizada, destacando os princípios comuns e as tecnicalidades específicas de cada uma das demonstrações.