PROVA DE MATEMÁTICA DISCRETA
2o. SEMESTRE DE 2003

Instruções. Esta prova é *individual*, mas naturalmente você pode consultar suas anotações, livros, etc. Entregue suas soluções até as 14:00 do dia 12/12/2003, na secretaria do MAC.

1. Para inteiros $t \leq n$, ponha
$$g(n,t) = \max |\mathcal{F}| \tag{1}$$
onde o máximo é tomado sobre todos os $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}([n]) = 2^{[n]}$ que são t-*intersectantes*, isto é, para todo F e $F' \in \mathcal{F}$, temos $|F \cap F'| \geq t$. (Aqui, não estamos considerando r-grafos para algum r fixo, mas sistemas de conjuntos sem restrição de cardinalidade para seus membros).
   (i) Mostre que $g(n,1) = 2^{n-1}$.
   (ii) Mostre que, para todo inteiro $t \geq 2$, temos $g(n,t) = (1+o(1))2^{n-1}$. Isto é, prove que $\lim_{n\to\infty} g(n,t)2^{-n+1} = 1$. [*Sugestão.* Use a fórmula de Stirling
$$n! = (1+o(1))\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n} \tag{2}$$
para provar que
$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + k} = (1+o(1))2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}} = o(2^n), \tag{3}$$
para todo $k \in \mathbb{Z}$ fixo. Deduza que
$$\sum_{k \geq (n+t)/2} \binom{n}{k} = (1+o(1))2^{n-1},$$
e use esse fato.]
2. [Kleitman] Suponha que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, e $\mathcal{I}$ são sistemas de conjuntos sobre o conjunto $X = [n]$, isto é, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, e $\mathcal{I} \subset 2^X = \mathcal{P}(X)$. Suponha ainda que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são "fechados por se tomar subconjuntos" e $\mathcal{H}$ e $\mathcal{I}$ são "fechado por se tomar superconjuntos". Isto é, se $F \subset F' \in \mathcal{F}$, então $F \in \mathcal{F}$ e analogamente para $\mathcal{G}$; enquanto que se $H \subset H'$ e $H \in \mathcal{H}$, então $H' \in \mathcal{H}$ e analogamente para $\mathcal{I}$. Prove que
$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{G}| \geq 2^{-n}|\mathcal{F}||\mathcal{G}|, \tag{4}$$
$$|\mathcal{H} \cap \mathcal{I}| \geq 2^{-n}|\mathcal{H}||\mathcal{I}|, \tag{5}$$
e
$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{H}| \leq 2^{-n}|\mathcal{F}||\mathcal{H}|. \tag{6}$$

Date: Versão de 3 de março de 2004.

[*Sugestão.* É suficiente provar, por exemplo, (6). Para tanto, fixe um $x \in X$ e considere os membros de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ que contêm x e os membros de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ que não contêm x separadamente, e use indução em $n = |X|$.]

3. Use o Lema de Kleitman, dado na Questão 2, para provar os resultados abaixo.
   (*i*) Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}([n])$. Mostre que se $\mathcal{F}$ é intersectante e $\mathcal{D}$ é fechado por se tomar subconjuntos, então $|\mathcal{F}| \leq (1/2)|\mathcal{D}|$.
   (*ii*) Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}([n])$ tal que, para todo F e $F' \in \mathcal{F}$, temos $F \cap F' \neq \emptyset$ e $F \cup F' \neq [n]$. Prove que $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-2}$. Mostre um exemplo em que ocorre a igualdade.
   (*iii*) Sejam $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k \subset \mathcal{P}([n])$ famílias intersectantes. Prove que
   $$|\mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_k| \leq 2^n - 2^{n-k}. \tag{7}$$
   Para todo n e k com $1 \leq k \leq n$, exiba $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k \subset \mathcal{P}([n])$ para os quais vale a igualdade em (7).
4. Prove que os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ podem ser coloridos de vermelho e azul de forma que nenhum subconjunto infinito S de $\mathbb{N}$ tem todos os seus subconjuntos infinitos da mesma cor. [*Sugestão.* Ponha $A \sim B$ se a diferença simétrica $A \triangle B$ é finita; pinte os conjuntos de forma que, se $A = B \setminus \{b\}$, então A e B têm cores distintas.]
5. Seja $\mathcal{A} = \{A_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ uma família de subconjuntos de um conjunto finito V. Considere os subconjuntos $\Lambda' \subset \Lambda$ tais que o sistema de conjuntos A_λ $(\lambda \in \Lambda')$ admite uma transversal (isto é, um sistema de representantes distintos: uma coleção de elementos dois a dois distintos $a_\lambda \in A_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda')$. Mostre que quaisquer dois tais conjuntos $\Lambda' \subset \Lambda$ têm a mesma cardinalidade. Defina um matróide sobre Λ a partir desta observação.
6. [Edmonds] Sejam $M = M(S)$ e $N = N(S)$ dois matróides sobre S. Prove que
   $$\begin{aligned} &\max\{|I| \colon I \in \mathcal{I}(M) \cap \mathcal{I}(N)\} \\ &\qquad\qquad = \min\{r_M(A) + r_N(S \setminus A) \colon A \subset S\}. \end{aligned} \tag{8}$$
   [*Sugestão.* Considere o matróide $M \vee N^*$, onde N^* é o dual de N.]
7. Seja G um grafo conexo, e suponha que as arestas de G estão coloridas de forma arbitrária. Prove que G contém uma árvore geradora com todas as suas arestas de cores distintas se e só se, para todo subgrafo H de G, o número de cores que ocorrem em $E(G) \setminus E(H)$ é pelo menos $c(H) - 1$, onde $c(H)$ é o número de componentes conexas em H. [*Sugestão.* Lembre-se do matróide uniforme $U_{n,m}$. Para cada cor, considere os conjuntos de arestas daquela cor e $m = 1$ (isto dá um matróide para cada cor). Aplique o teorema de Edmonds dado na Questão 6. Alternativamente, dê uma prova elementar.]