PROVA DE MATEMÁTICA DISCRETA
2o. SEMESTRE DE 2003

Instruções. Esta prova é *individual*, mas naturalmente você pode consultar suas anotações, livros, etc. Entregue a soluções das questões 1 e 2 até as 14:00. Entregue as demais soluções até as 20:00 do dia 4/03/2004, em minha sala, quando faremos uma pequena entrevista.

1. *Prove o seguinte lema*: For any symmetric matrix $\mathbf{A} = (A_{ij})_{1\le i,j\le n}$, we have
$$\mathrm{rk}(\mathbf{A}) \ge \frac{(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2}{\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)} = \frac{\left(\sum_{1\le i\le n} A_{ii}\right)^2}{\sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}^2}. \tag{1}$$
Consequently, if $A_{ii} = 1$ for all i and $|A_{ij}| \le \varepsilon$ for all $i \ne j$, then
$$\mathrm{rk}(\mathbf{A}) \ge \frac{n}{1+\varepsilon^2(n-1)}. \tag{2}$$
In particular, if $\varepsilon = \sqrt{1/n}$, then $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) \ge n/2$. [*Sugestão.* Let $r = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$. Show that $\mathbf{A}$ has r non-zero eigenvalues, say, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Apply Cauchy–Schwarz to deduce that
$$(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2 = (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)^2 \le r(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_r^2) = r\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2).$$
Now use that $\mathbf{A}$ is symmetric and compute $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)$.]
2. Aplique o lema acima para encontrar uma cota superior para o número máximo de vetores unitários $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ com $|\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle| \le 1/100\sqrt{n}$ para todo $i \ne j$. [*Sugestão.* Considere a matrix $m \times m$ cujas entradas são $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle$.]
3. Escolha dois problemas da lista 1. (A sua nota dependerá de sua escolha: exercícios muito simples valem pouco.)
4. Escolha um problema da lista 2. (Idem.)

Date: Versão de 4 de março de 2004.