TERCEIRA PROVA DE ALGORITMOS EM GRAFOS
BCC, 1o. SEMESTRE DE 2004

1. [2 pontos] Lembre que um *vertebrado* é uma tripla (T, x, y), onde T é uma árvore e x e y são vértices de T (x é a *cabeça* do vertebrado e y é a *cauda* do vertebrado). Lembre que existe uma bijeção entre vertebrados com n vértices e funções $f\colon [n] \to [n]$, onde, como de usual, $[n] = \{1, \ldots, n\}$. O *diâmetro* $\operatorname{diam}(G)$ de um grafo conexo G é o máximo das distâncias entre dois vértices em G, isto é,

$$\operatorname{diam}(G) = \max\{\operatorname{dist}_G(x, y)\colon x,\, y \in V(G)\}. \tag{1}$$

Descreva cuidadosamente como podemos estimar computacionalmente o diâmetro médio de uma árvore T com n vértices, para n razoavelmente grande (digamos, $n = 20$). Isto é, como podemos estimar

$$n^{-(n-2)} \sum \operatorname{diam}(T), \tag{2}$$

onde a soma é sobre toda árvore T com conjunto de vértices $[n]$? (Nesta questão, não é necessário escrever código; basta você esboçar um procedimento, e dizer por que ele funciona.)

2. [2 pontos] Considere o seguinte trecho de código, que implementa a essência do algoritmo de Warshall:

```
for (i = 0; i < V; i++)
  for (s = 0; s < V; s++)
    for (t = 0; t < V; t++)
      if (A[s][i] && A[i][t])
        A[s][t] = 1;
```

   (i) Execute o trecho de código acima na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

   (Você deve dizer o estado da matriz A após cada iteração do `for` mais externo.)

   (ii) Generalize (i): considere o grafo dirigido G_n com n vértices generalizando o grafo em (i). (Assim, G_6 é o grafo do item (i).) Descreva a matriz A correspondente ao grafo G_n após a execução do corpo do `for` externo para um i genérico ($0 \le i < n = V$).

3. [2 pontos] (Nesta questão, os grafos são não-orientandos.) Suponha que temos $G = (V, E)$ um grafo com função custo nas arestas $c\colon E \to \mathbb{R}$. Seja ainda s um vértice fixo de G. Por simplicidade, suponha $c(e)$ positivo para todo $e \in E$. Podemos definir *uma árvore de caminhos mínimos com raiz s* como sendo uma árvore geradora T de G que tem a propriedade de que, para todo $t \in V$, a distância $\mathrm{dist}_G(s, t)$ de s a t em G é igual à distância $\mathrm{dist}_T(s, t)$ em T. É verdade que uma tal árvore de caminhos mínimos com raiz s é necessariamente uma árvore geradora mínima? Prove ou dê um contra-exemplo. Se você for dar um contra-exemplo, ele deve ser tal que $0 < c(e) \leq 1$ para todo e, mas o custo das árvores em questão (árvore de caminhos mínimos e árvore geradora mínima) diferem de pelo menos 10^{10}.
4. [4 pontos] Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e $c\colon E \to \mathbb{R}$ uma função custo nas arestas de G.
   (i) Seja $A \subset E$ um conjunto de arestas de G que está contida em alguma árvore geradora mínima de G. Seja $U \subset V$ tal que $A \cap E(U, V \setminus U) = \emptyset$, onde $E(U, V \setminus U) = \big\{\{u, w\} \in E\colon u \in U,\, w \in V \setminus U\big\}$ é o corte definido por U. Suponha que $e \in E(U, V \setminus U)$ tem custo mínimo dentre as arestas em $E(U, V \setminus U)$. Mostre que $A \cup \{e\}$ está contida em alguma árvore geradora mínima de G.
   (ii) Descreva o algoritmo de Kruskal precisamente e prove sua correção.
   (iii) Descreva o algoritmo de Prim precisamente e prove sua correção.