PROVA DE RECUPERAÇÃO DE ALGORITMOS EM GRAFOS
BCC, 1o. SEMESTRE DE 2004

1. [2 pontos] Descreva o que ocorre quando executamos o algoritmo de Tarjan para componentes fortemente conexas em um DAG.
2. [2 pontos] Lembre que um *vertebrado* é uma tripla (T, x, y), onde T é uma árvore e x e y são vértices de T (x é a *cabeça* do vertebrado e y é a *cauda* do vertebrado). Lembre que existe uma bijeção entre vertebrados com n vértices e funções $f\colon [n] \to [n]$, onde, como de usual, $[n] = \{1, \dots, n\}$. Lembre que uma *folha* em uma árvore é um vértice de grau 1. Descreva cuidadosamente como podemos estimar computacionalmente o número médio de folhas em uma árvore T com conjunto de vértices $[n]$, para n razoavelmente grande (digamos, $n = 20$). Isto é, como podemos estimar
$$n^{-(n-2)} \sum (\text{número de folhas em } T), \tag{1}$$
onde a soma é sobre toda árvore T com conjunto de vértices $[n]$? (Nesta questão, não é necessário escrever código; basta você esboçar um procedimento, e dizer por que ele funciona.)
3. [2 pontos] Seja $G = (V, E)$ um grafo. Podemos definir um grafo dirigido $\vec{G} = (V, \vec{E})$ a partir de G, atribuindo a cada aresta $e = \{x, y\}$ de G uma de suas duas possíveis orientações (formalmente, temos $(x, y) \in \vec{E}$ ou $(y, x) \in \vec{E}$, mas não ambos). Podemos chamar um tal $\vec{G}$ de uma *orientação* de G. Prove que existe uma orientação fortemente conexa de G se e só se G é conexo e não tem arestas de corte.
4. [2 pontos] Seja G um grafo e $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$ uma função custo definida nas arestas de G. Seja T uma árvore geradora de G. Lembre que se $e \in E(G) \setminus E(T)$, então o grafo $T + e$ contém um único circuito, chamado de *circuito fundamental de e em relação a T*, freqüentemente denotado por $C(e, T)$. Prove que são equivalentes:
   (i) T é uma árvore geradora de custo mínimo em G.
   (ii) Toda $e \in E(G) \setminus E(T)$ tem peso máximo dentre as arestas em $C(e, T)$.
5. [2 pontos] Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e $c\colon E \to \mathbb{R}$ uma função custo nas arestas de G.
   (i) Seja $A \subset E$ um conjunto de arestas de G que está contida em alguma árvore geradora mínima de G. Seja $U \subset V$ tal que $A \cap E(U, V \setminus U) = \emptyset$, onde $E(U, V \setminus U) = \big\{\{u, w\} \in E\colon u \in U,\, w \in V \setminus U\big\}$ é o corte definido por U. Suponha que $e \in E(U, V \setminus U)$

tem custo mínimo dentre as arestas em $E(U, V \setminus U)$. Mostre que $A \cup \{e\}$ está contida em alguma árvore geradora mínima de G.

(ii) Descreva o algoritmo de Kruskal precisamente e prove sua correção.

(iii) Descreva o algoritmo de Prim precisamente e prove sua correção.