O método de Ford e Fulkerson

Ford–Fulkerson(G, s, t):

1. $f \equiv 0$
2. **enquanto** existe caminho aumentador P **faça**
   2.1 aumente f ao longo de P
3. **Devolva** f

▷ Prova do teorema do fluxo máximo/corte mínimo

Convenção

Dados: $G = (V, E)$ e s, $t \in V$. Até agora: (s, t)-fluxo $f\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Convenção

Dados: $G = (V, E)$ e $s, t \in V$. Até agora: (s,t)-fluxo $f\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Mais conveniente:

- $\triangleright$ $F\colon V \times V \to \mathbb{R}$
- $\triangleright$ Se $(x,y) \in E$ e $(y,x) \notin E$, então $F(x,y) = -F(y,x) = f(x,y)$.
- $\triangleright$ Se $(x,y) \in E$ e $(y,x) \in E$, então $F(x,y) = f(x,y) - f(y,x)$.
- $\triangleright$ Se $(x,y) \notin E$ e $(y,x) \notin E$, então $F(x,y) = 0$.

Escrevemos simplesmente f em vez de F.

Convenção

Dados: $G = (V, E)$ e $s, t \in V$. Até agora: (s,t)-fluxo $f\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Mais conveniente:

- ▷ $F\colon V \times V \to \mathbb{R}$
- ▷ Se $(x,y) \in E$ e $(y,x) \notin E$, então $F(x,y) = -F(y,x) = f(x,y)$.
- ▷ Se $(x,y) \in E$ e $(y,x) \in E$, então $F(x,y) = f(x,y) - f(y,x)$.
- ▷ Se $(x,y) \notin E$ e $(y,x) \notin E$, então $F(x,y) = 0$.

Escrevemos simplesmente f em vez de F.

Para capacidades: estendemos para $c\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, pondo $c(x,y) = 0$ se $(x,y) \notin E$.

Rede residual

Dados $G = (V, E)$, s, $t \in V$ e um fluxo $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, pomos

$$c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$$

para todo $(x, y) \in V \times V$.

Rede residual

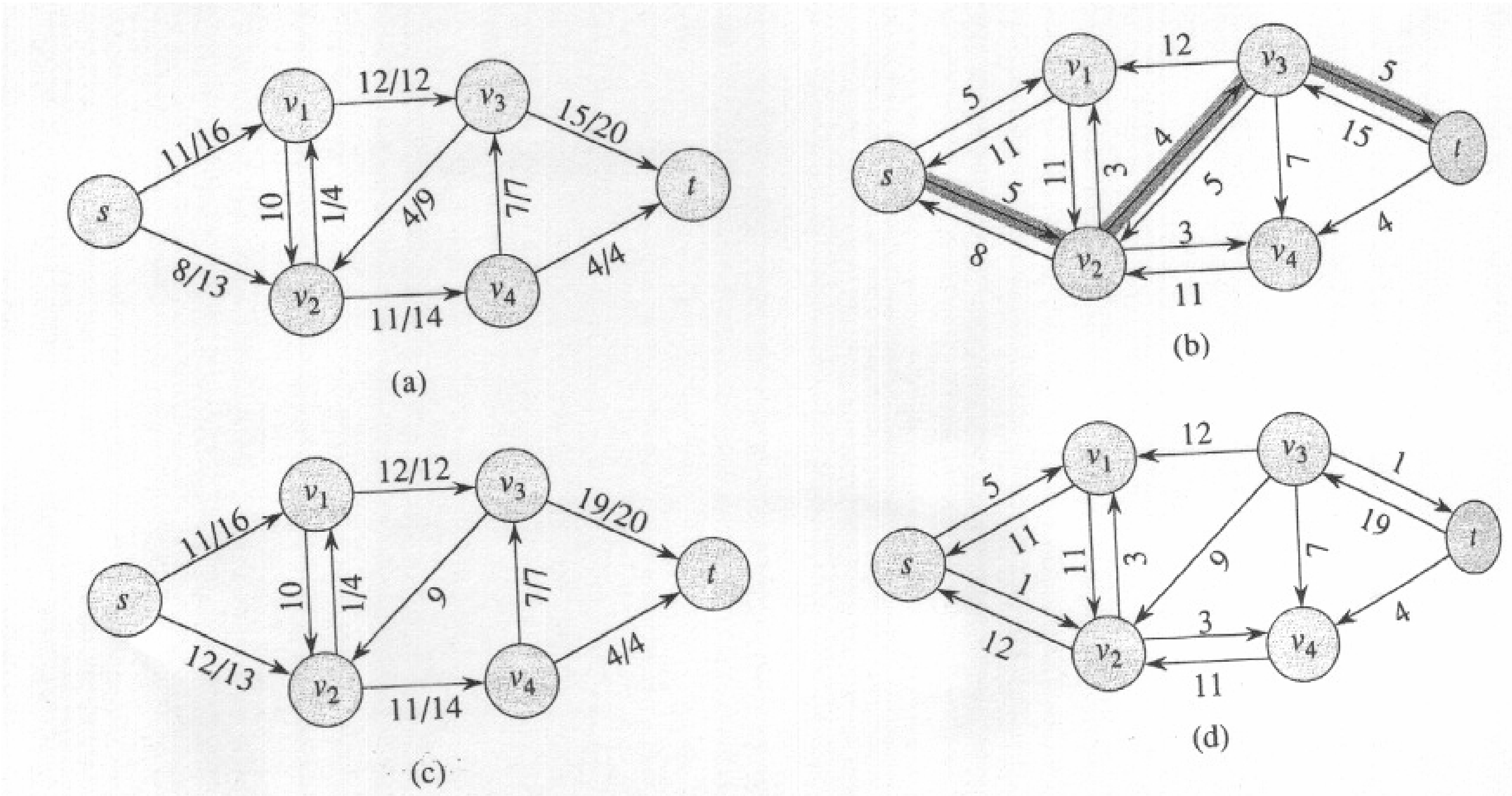
Dados $G = (V, E)$, s, $t \in V$ e um fluxo $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, pomos

$$c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$$

para todo $(x, y) \in V \times V$.

▷ Rede residual: rede $G_f = (V, E_f)$, onde

$$E_f = \{e \in E\colon c_f(e) > 0\}$$

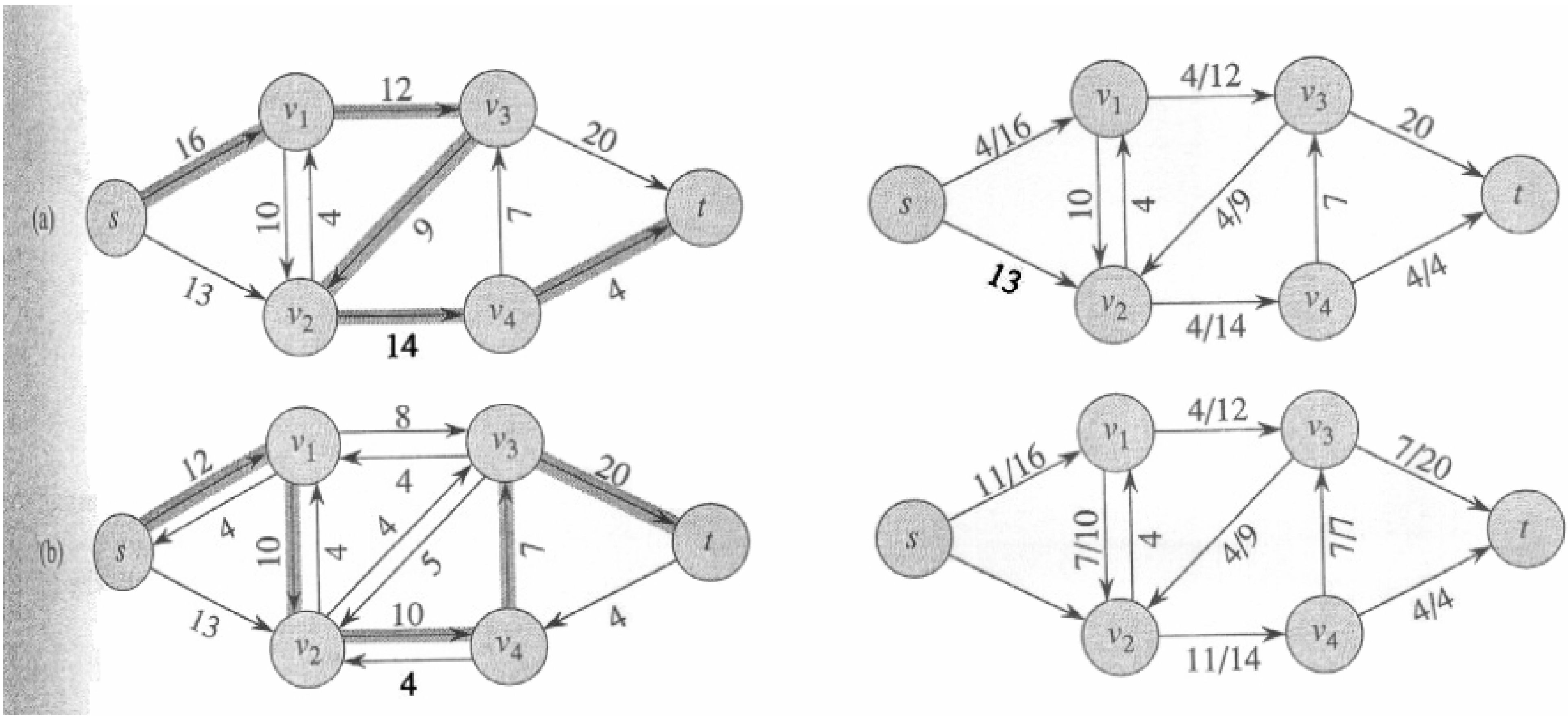


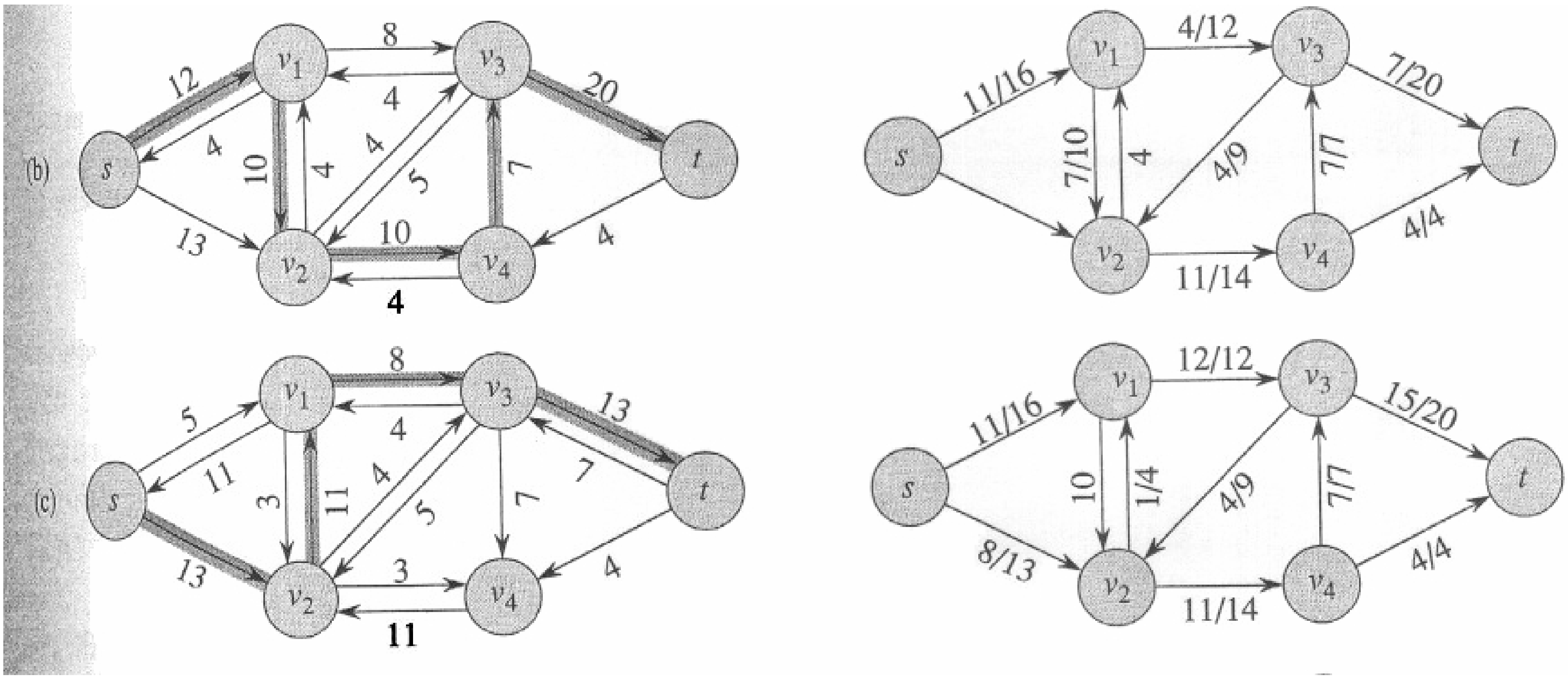
(a) fluxo, (b) rede residual e um caminho aumentador, (c) fluxo aumentado,

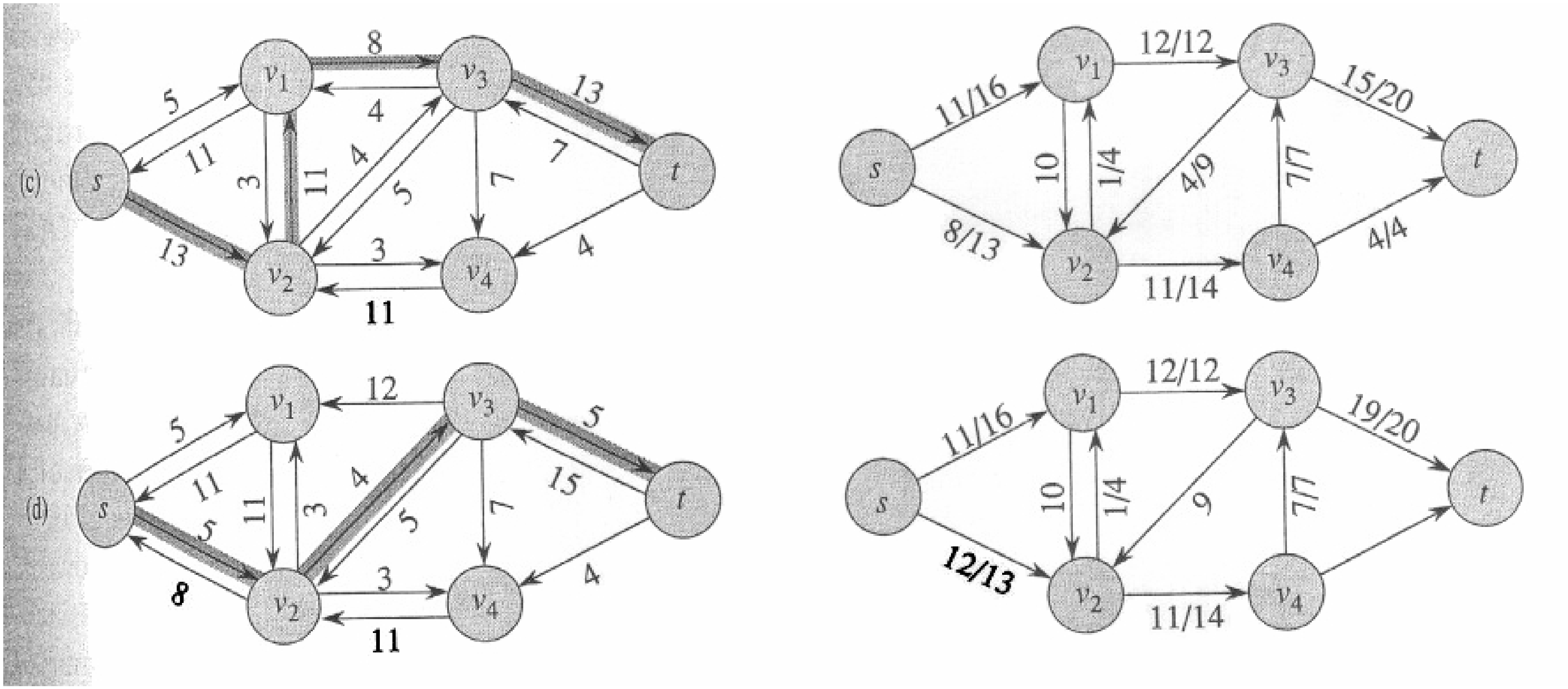
(d) nova rede residual

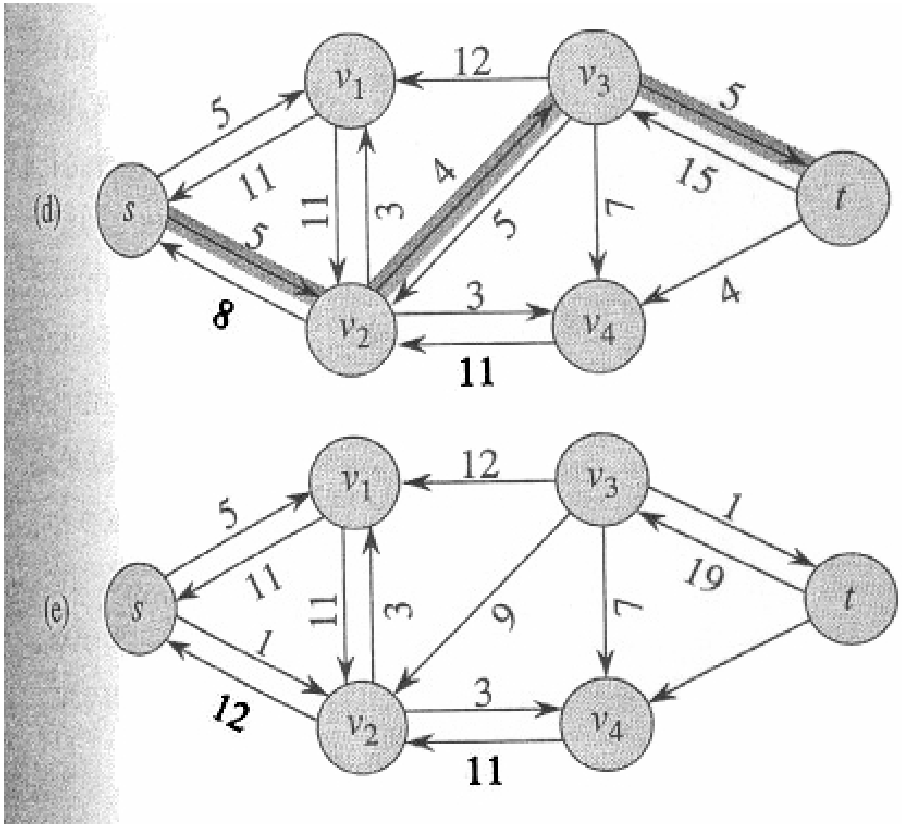
Ford–Fulkerson

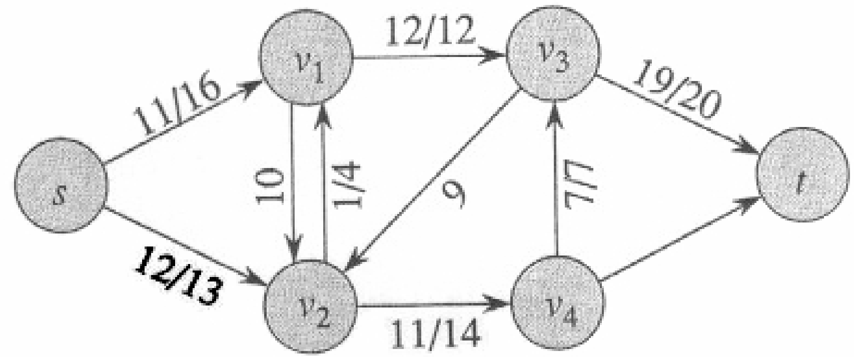
▷ Exemplo


(a)
s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
16
12
20
10
4
9
7
13
4
14
4/16
4/12
4/9
4/4
4/14
(b)
8
11/16
7/10
7/7
7/20
11/14


(b)
s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
12
8
20
4
4
10
4
4
5
7
13
10
4
4
4/12
11/16
7/20
7/10
4
4/9
7/7
4/4
11/14
(c)
8
5
13
4
11
3
11
4
5
7
7
3
13
4
11
12/12
11/16
15/20
10
1/4
4/9
7/7
8/13
4/4
11/14


(c)
s
v1
v2
v3
v4
t
8
5
4
11
3
11
4
5
7
7
13
13
3
4
11
12/12
11/16
15/20
10
1/4
4/9
7/7
8/13
11/14
4/4
(d)
12
5
11
11
3
4
5
7
15
5
5
8
3
4
11
12/12
11/16
19/20
10
1/4
9
7/7
12/13
11/14





Em (d), após o aumento do fluxo, temos um fluxo máximo (basta considerar o corte dado por $\{s, v_1, v_2, v_4\}$). O grafo residual em (e) não tem caminhos aumentadores.

Ford–Fulkerson

▷ Política de escolha do caminha aumentador é importante.

Edmonds– Karp

▷ **Natural:** encontrar o caminho aumentador fazendo uma BeL na rede residual (Edmonds–Karp).

Teorema 1. *Com a política de Edmonds–Karp, o método de Ford–Fulkerson encontra um fluxo máximo em tempo $O(nm^2)$.*

Edmonds– Karp

$\triangleright$ **Natural:** encontrar o caminho aumentador fazendo uma BeL na rede residual (Edmonds–Karp).

Teorema 1. *Com a política de Edmonds–Karp, o método de Ford–Fulkerson encontra um fluxo máximo em tempo $O(nm^2)$.*

$\triangleright$ Goldberg/Goldberg–Tarjan: $O(n^2m)$, $O(n^3)$