PROVA DE RECUPERAÇÃO DE ALGORITMOS EM GRAFOS
BCC, 1o. SEMESTRE DE 2005

Instruções: faça três questões no total, distribuídas da seguinte forma:

(A) Faça uma questão dentre A1 e A2.
(B) Faça uma questão dentre B1 e B2.
(C) Faça uma questão dentre C1 e C2.

Seja muito cuidadoso na redação de suas respostas. Respostas implícitas ou sem justificativas claras valem pouco. A duração da prova é de **duas horas**.

A1. [3 pontos] Seja $G = (V, E)$ um grafo. Podemos definir um grafo dirigido $\vec{G} = (V, \vec{E})$ a partir de G, atribuindo para cada aresta $e = \{x, y\}$ de G uma de suas duas possíveis orientações (formalmente, temos $(x, y) \in \vec{E}$ ou $(y, x) \in \vec{E}$, mas não ambos). Podemos chamar um tal $\vec{G}$ de uma *orientação* de G. Prove que existe uma orientação fortemente conexa de G se e só se G é conexo e não tem arestas de corte.

A2. [3 pontos] Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e $c\colon E \to \mathbb{R}$ uma função custo definida nas arestas de G.

(i) Seja $A \subset E$ um conjunto de arestas contida em alguma árvore geradora mínima (AGM) de (G, c). Seja $S \subset V$ tal que o corte $E(S, V \setminus S)$ é disjunto de A. Seja $e \in E(S, V \setminus S)$ tal que $c(e) = \min\{c(f)\colon f \in E(S, V \setminus S)\}$, isto é, a aresta e tem custo mínimo dentre as arestas do corte $E(S, V \setminus S)$. Prove que $A \cup \{e\}$ está contida em uma AGM de (G, c).

(ii) Considere o algoritmo abaixo:

(1) $A \leftarrow \emptyset$
(2) Enquanto $|A| < |V| - 1$, faça:
  (2.1) $C \leftarrow$ uma componente conexa arbitrária de $G[A] = (V, A)$
  (2.2) $e \leftarrow$ uma aresta de custo mínimo que liga C a alguma outra componente de $G[A]$
  (2.3) $A \leftarrow A \cup \{e\}$
(3) Devolva A

Prove que, ao término da execução do algoritmo acima, $G[A]$ é uma AGM de (G, c).

B1. [3.5 pontos] Seja G um grafo dirigido e $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$ um função custo definida nos arcos de G. Por simplicidade, suponha que o custo de todo arco é não-negativo. Fixe $s \in V(G)$, e suponha que todo vértice de G é acessível a partir de s. Para todo $x \in V(G)$, escrevemos $d_c(s, x)$ para o custo mínimo dos caminhos dirigidos de s a x. Um *potencial* p *para* (G, c) é uma função $p\colon V(G) \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(v) \leq p(u) + c(u, v) \text{ para todo } (u, v) \in E(G). \tag{1}$$

Ademais, dizemos que um arco (u, v) é *justo* se vale a *igualdade* em (1). Suponha que um potencial p satisfaz as seguintes duas propriedades:

(a) $p(s) = 0$,
(b) todo vértice $x \in V(G)$ é acessível a partir de s por um caminho que só contém arcos justos.

Prove os seguintes fatos:

(i) Para todo $x \in V(G)$, vale que $p(x) \leq d_c(s, x)$. [*Observação.* Para este item, a única hipótese necessária sobre o potencial p é que $p(s) \leq 0$.]

(ii) Para todo $x \in V(G)$, vale que $d_c(s,x) \leq p(x)$. [*Sugestão.* Seja (P_k) a seguinte asserção: *se x é acessível a partir de s através de um caminho com k arcos, todos eles justos, então $d_c(s,x) \leq p(x)$.* Prove que (P_k) vale para todo k por indução em k.]

Conclua que $d_c(s,x) = p(x)$ para todo vértice x de G.

B2. [3.5 pontos] Esta questão trata de fluxos em redes.

(i) O que é uma rede (G,c)? (Lembre-se de mencionar os vértices especiais s e t.)

(ii) O que é um fluxo de s a t em (G,c)? O que é o valor de um tal fluxo?

(iii) O que é um corte que separa s de t? O que é a capacidade de um tal corte?

(iv) Enuncie o teorema do fluxo máximo/corte mínimo.

(v) Prove o teorema do fluxo máximo/corte mínimo.

C1. [3.5 pontos] Considere a implementação do algoritmo de Dijkstra visto em sala (Programa 21.1):

```
#define GRAPHpfs GRAPHspt
#define P (wt[v] + t->wt)
void GRAPHpfs(Graph G, int s, int st[], double wt[])
  { int v, w;  link t;
    PQinit(); priority = wt;
    for (v = 0; v < G->V; v++)
      { st[v] = -1; wt[v] = maxWT; PQinsert(v); }
    wt[s] = 0.0; PQdec(s);
    while (!PQempty())
      if (wt[v = PQdelmin()] != maxWT)
        for (t = G->adj[v]; t != NULL; t = t->next)
          if (P < wt[w = t->v])
            { wt[w] = P; PQdec(w); st[w] = v; }
  }
```

Seja G o grafo de 5 vértices e 10 arcos com custos nos arcos dado por

```
0: 1(5) 3(10)
1: 2(2) 3(3) 4(9)
2: 0(7) 4(6)
3: 1(2) 4(1)
4: 2(4)
```

Na notação acima, por exemplo, `0: 1(5)` significa que há um arco de `0` para `1` de custo `5`.

(i) Execute o Programa 21.1 no grafo G dado acima, com $s = 0$, ilustrando a evolução do algoritmo através de diagramas convenientes (uns 6 diagramas bastam).

(ii) Determine um potencial $p\colon V(G) \to \mathbb{R}$ para certificar que você encontrou as distâncias de 0 a todos os outros vértices em G em (i) acima corretamente (veja a Questão B1). Você deve dizer explicitamente por que sua função p é um potencial e por que ela de fato certifica as distâncias encontradas.

(iii) Descreva um algoritmo de complexidade $O(n+m)$ que poderia ser executado após o Programa 21.1 para verificar que de fato as distâncias a partir de s foram determinadas corretamente. Por simplicidade, suponha que todos os vértices de G são acessíveis a partir de s. (Como você pode se livrar dessa hipótese?)

C2. [3.5 pontos] Seja G o grafo dirigido com 6 vértices e 10 arcos, com *capacidades* nos arcos, dado abaixo:

```
0: 1(16) 2(13)
1: 2(10) 3(12)
2: 1(4) 4(14)
3: 2(9) 5(20)
4: 3(7) 5(4)
5:
```

Na notação acima, por exemplo, "`0: 1(16)`" significa que há um arco de `0` para `1` de capacidade `16`. No que segue, consideramos fluxos de $s = 0$ para $t = 5$ no grafo G acima.

(i) Desenhe o grafo dirigido G.

(ii) Considere o fluxo de s para t em G dado por:

```
0: 1(11) 2(8)
1: 2(0) 3(12)
2: 1(1) 4(11)
3: 2(4) 5(15)
4: 3(7) 5(4)
5:
```

Acima, por exemplo, "`0: 1(11)`" significa que o fluxo no arco de `0` para `1` é `11`. Encontre um caminho aumentador para o fluxo acima.

(iii) Encontre um fluxo de valor maior que o fluxo dado em (ii), usando o caminho aumentador que você encontrou em (ii) para aumentar aquele fluxo.

(iv) Encontre um fluxo máximo de s para t no G dado acima. Encontre um corte mínimo que separa s de t em G. Dê um argumento para provar que seu fluxo é de fato máximo e seu corte é de fato mínimo.

(v) Um arco é *vital* se a redução de sua capacidade (por menor que seja essa redução) reduz o valor do fluxo máximo. Determine todos os arcos vitais em G dado acima. Justifique sua resposta.